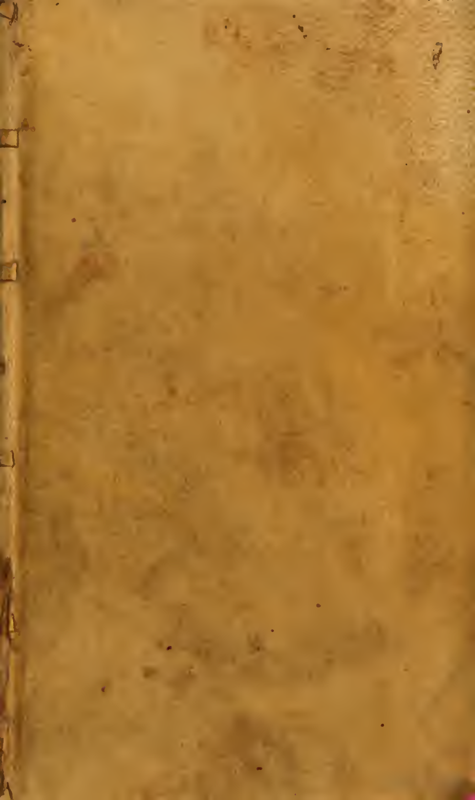
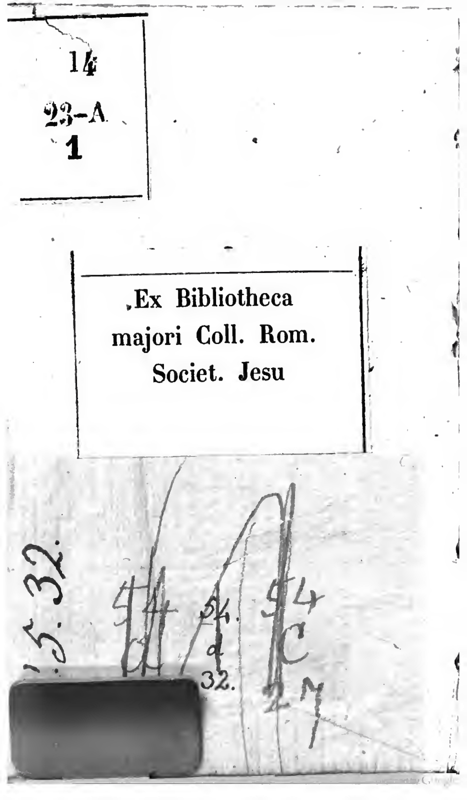
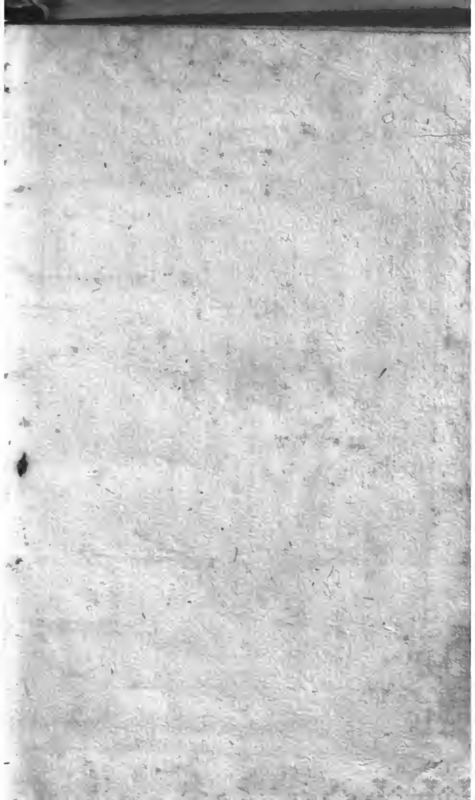



14
23-A
1
Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu
32.







GEOMETRIE PRACTIQUE
par OZANAM.

NOUVELLE GEOMETRIE PRATIQUE;

CONTENANT

LA TRIGONOMETRIE THEORIQUE & Pratique, la LONGIMETRIE, la PLANIMETRIE, & la STEREOMETRIE.

PAR DE NOUVELLES Demonstrations tres-courtes & tres-faciles; & de nouveaux abregez pour mesurer exactement les Plans & les Solides.

Par M. OZANAM, *Professeur des Mathematiques du Roy Trés-Christien.*





A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET,

M. DC. XCIII.
Avec Privilege du Roy.

AU LECTEUR.

CE Livre ayant esté composé principalement en faveur de ceux qui aiment plus la pratique que la theorie, je n'ay pas voulu y ajoûter une grande quantité de démonstrations tres-difficiles, pour ne pas dégoûter ceux qui sont mediocrement versez dans les Mathematiques. Mais comme ce Traité ne doit pas aussi estre tout-à-fait sans démonstrations, pour ne pas oster à ceux qui se serviront des regles de ce Livre, le plaisir de sçavoir la raison de ce qu'ils font; j'ay pris un milieu entre ces deux extremitez, c'est-à-dire que j'ay donné des démonstrations les plus courtes & les plus simples qu'il m'a été possible, dans les endroits seulement où je l'ay trouvé à propos, les ayant omises en plusieurs autres, où la demonstration étoit facile à trouver & se donnoit d'elle-même, & où elle ne pouvoit être que fort longue. J'ay separé les Theoremes d'avec les Problemes, pour la satis-

faction de ceux qui ne se soucient que de la pratique, aussi-bien que de ceux qui aiment la theorie & la pratique tout ensemble, qu'ils trouveront par ordre chacune dans son lieu. La mort imprevûë de Monsieur Colbert ayant rompu le dessein qu'il avoit de faire imprimer l'Arithmetique de Diophante, que j'ay augmentée & reduite à la Specieuse, avec trois autres Traitez, dont le projet a été publié, me fait travailler tout de nouveau sur les six Livres de cet Auteur, que j'augmenteray pour le moins du double de ce qu'ils étoient auparavant, pour ne pas priver le Public des nouvelles pensées qui me viennent continuellement sur cette matiere. J'ay discontinué d'y travailler pendãt le temps que j'ay employé à composer ce Livre, & un autre qui est à present sous la Presse, qui traite de la Trigonometrie Rectiligne & Spherique, & de la construction des Tables des Sinus & des Logarithmes, dont je n'ay pas pû me dispenser à la priere que m'en a faite le Libraire.



TRAITÉ DE LA GEOMETRIE PRATIQUE.

LA Geometrie, quoy que ce mot Grec ne signifie que mesure de terre, est la science de la quantité continuë, c'est à dire des Lignes, des Plans, & des Solides, ce qui fait qu'on la divise ordinairement en trois parties, qui sont la *Longimetrie*, la *Planimetrie*, & la *Stereometrie*, ausquelles nous ajoûterons la *Trigonometrie Rectiligne*, que nous mettrons la premiere, parce qu'elle est le fondement des trois autres. Mais aupa-

ravant que de commencer, nous emprunterons quelque chose de la Geometrie Speculative, sans laquelle la Geometrie Pratique ne sçauroit être bien entenduë.

DES PRINCIPES DE GEOMETRIE en general.

IL y a trois genres de Principes Mathematiques, les *Definitions*, les *Demandes*, & les *Axiomes*, qu'on nomme ordinairement *communes Notions de l'esprit*.

Les *Definitions* sont l'explication des mots & des termes necessaires pour entendre les choses dont on veut traitter. Ainsi pour bien entendre la Geometrie, on doit premierement sçavoir ce que c'est que *Triangle*, que *Cercle*, &c.

Les *Demandes* sont des pratiques tellement faciles d'elles-mêmes, qu'elles n'ont besoin d'aucun precepte pour les apprendre. Comme de *tirer une ligne d'un point à un au-*

tre point, ou de *prolonger une ligne si loin que l'on voudra*, ou bien de *décrire un cercle de quelque point que ce soit, & de telle grandeur que l'on voudra.*

Les *Axiomes* ou *Maximes* sont des propositions tellement évidentes d'elles-mêmes, qu'on ne les peut pas nier sans dementir les sens & la raison. Ainsi il n'y a personne qui ne voye bien que *le tout est plus grand que sa partie.*

De ces trois sortes de principes naissent les *Hypotheses*, les *Problemes*, les *Theoremes*, les *Corollaires*, les *Lemmes*, & les *Scolies*.

Hypothese est une supposition de ce qui n'est pas pour ce qui peut être. Ainsi il n'est pas necessaire que l'hypothese soit veritable, mais il suffit qu'elle soit possible. D'où il suit que sur un même sujet on peut faire plusieurs differentes hypotheses. Ainsi une même ligne peut être prise tantost pour

droite, & tantôt pour courbe, parce qu'elle peut être telle.

Les *Problemes* ſont des propoſitions, qui tendent à la pratique. Comme de diviſer une ligne terminée en deux également.

Theoreme c'eſt une propoſition, qui exprime les proprietez d'une choſe. Comme quand on dit qu'un triangle aura deux angles égaux lorſqu'il aura deux côtez égaux.

Corollaire c'eſt une conſequence tirée de ce qui a eſté fait ou demontré. Comme quand du Theoreme precedent on conclud qu'un triangle équilateral eſt équiangle.

Lemme c'eſt une propoſition qui ſert pour la demonſtration d'un Theoreme, ou pour la pratique d'un Probleme.

Scolie c'eſt une remarque faite ſeulement comme en paſſant ſur quelque diſcours.

DES PRINCIPES DE GEOMETRIE en particulier.

DEFINITIONS.

1. LE *point Mathematique* eſt ce qui n'a aucunes parties, & qui par conſequent ne peut être conceu que par l'entendement. Comme l'on s'imagine que la *Ligne* eſt cauſée par le mouvement du *Point* : il s'enſuit que

2. La *Ligne* eſt une longueur ſans largeur, dont les extremitez ſont des points:car puiſqu'elle commence par un point, elle doit finir auſſi par un point.

3. Si le point Mathematique en ſe mouvant ne va pas plus d'un côté que de l'autre, alors la ligne qu'il décrit par ſon mouvement, ſe nomme *Ligne droite*. Comme l'on s'imagine que la *Surface* eſt produite par le mouvement de la *Ligne* : il s'enſuit que

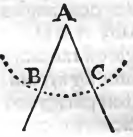
4. La *Surface* eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement, dont les extremités ſont des *Lignes*: car puiſqu'elle commence par une ligne, elle doit finir auſſi par une ligne du côté oppoſé à celuy d'où elle a commencé; il en eſt de même des autres côtez, parce que les extremitez de la ligne, qui par ſon mouvement a produit cette Surface, étant des points, ces points ne peuvent faire que des lignes par leur mouvement.

5. Si l'on conçoit qu'une ligne droite ſe meuve ſans s'incliner ny ſans s'élever plus d'un côté que de l'autre, alors la Surface qu'elle décrit par ce mouvement, ſe nomme *Surface plane*, ou *Plan*. Comme par le mouvement de la *Surface* on s'imagine que le *Solide* eſt produit: il s'enſuit que

6. Le *Solide*, ou *Corps*, eſt ce qui a longueur, largeur, & hauteur ou profondeur, dont les extremitez

ſont des *Surfaces*:car puiſqu'il commence par une Surface, il doit finir auſſi par une Surface du côté oppoſé à celuy d'où elle a commencé ; il en eſt de même des autres côtez, parce que les extremitez de la Surface, qui par ſon mouvement a produit ce Corps, étant des lignes, ces lignes ne peuvent faire que des Surfaces par leur mouvement.

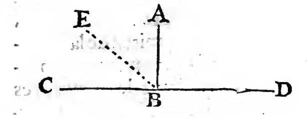
7. *Angle plan* c'eſt l'inclination de deux lignes ſur un même Plan, leſquelles ſe rencontrant en un point ne font pas une même ligne droite, comme B A C, qu'on pourroit exprimer par la ſeule lettre A, parce que dans ce point A il ne ſe forme qu'un ſeul angle, qui ſe nomme *Rectiligne*, lorſque les deux lignes AB, AC, qui le compoſent, ſont droites.



8. *Angle ſolide* c'eſt la rencontre de trois ou de pluſieurs Plans, qui

ſe coupent en un même point.

9. Une ligne eſt dite *Perpendiculaire* à une autre ligne, lorſqu'elle



la coupe par des angles égaux de part & d'autre, leſquels à cauſe de cela ſont appellez *Droits*. Ainſi on connoiſt que la ligne AB eſt perpendiculaire à la ligne CD, parce qu'elle fait avec elle des angles égaux & droits ABC, ABD.

10. Lorſqu'un angle eſt moindre qu'un droit, il ſe nomme *aigu*, comme CBE, & quand il eſt plus grand qu'un droit, il s'appelle *obtus*, comme EBD.

11. *Figure* c'eſt ce qui eſt fermé de tous côtez: d'où il ſuit qu'un angle n'eſt pas une figure.

12. *Figures rectilignes* ſont celles

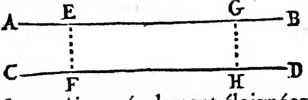
qui ſont compriſes par des lignes droites, dont celle ſe nomme de trois côtez, ou *Triangle*, qui eſt contenuë de trois lignes droites; & de quatre côtez, ou *Quadrangle*, celle qui eſt compriſe de quatre lignes droites; & de pluſieurs côtez, ou *Polygone*, celle qui eſt compriſe de plus de quatre lignes droites.

13. Des figures de trois côtez, celle qui a les trois côtez égaux, ſe nomme *Triangle équilateral.* Celle qui a deux côtez ſeulement égaux, ſe nomme *Triangle Iſoſcele.* Et celle qui a les trois côtez inégaux, ſe nomme *Triangle ſcalene.*

14. Ces mêmes Triangles prennent à raiſon de leurs angles d'autres denominations; celui-là s'appelant *Oxygone*, qui a tous les angles aigus: *Amblygone*, celuy qui a un angle obtus; & *Rectangle*, celuy qui a un angle droit, dont le plus grand côté qui eſt oppoſé à l'angle droit, ſe nomme *Hypotenuſe.*

15. Des figures de quatre côtez, celle qui a tous les côtez égaux, & tous les angles droits, se nomme *Quarré*, dont la ligne qui passe par les deux angles opposez, se nomme *Diagonale*. Celle qui a bien tous les angles droits, mais qui n'a pas tous les côtez égaux, s'appelle *Quarré-long*. Celle qui a bien tous les côtez égaux, mais qui n'a pas les angles droits, se nomme *Rhombe*. Celle qui n'a pas les angles droits, mais seulement les côtez opposez égaux, se nomme *Rhomboïde*. Toute autre figure, qui n'est pas de la qualité des precedentes, se nomme *Trapeze*.

16. *Lignes paralleles* sont celles qui étant prolongées de part & d'autre à l'infiny sur un même plan,



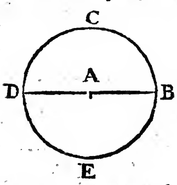
sont toûjours également éloignées

entre elles, comme A B, CD, dont les diſtances EF, GH, ſont égales. Or nous prenons la diſtance de deux lignes paralleles par une perpendiculaire tirée entre ces deux lignes, comme étant la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer entre ces mêmes lignes. D'où il ſuit que *toutes les perpendiculaires tirées entre deux paralleles ſont égales entre elles.* Ce que je viens de dire des lignes paralleles, le même ſe doit entendre des *Plans paralleles.*

17. *Parallelogramme* c'eſt une figure de quatre côtez, dont les lignes oppoſées ſont paralleles entre elles. Tels ſont le *Quarré*, le *Quarré-long* ou *Barlong*, le *Rhombe*, & le *Rhomboïde.*



18. *Cercle* c'eſt une figure plane cauſée par le mouvement achevé d'une ligne droite ſur un Plan alentour d'un point fixe. Comme ſi on fait mouvoir par penſée la ligne AB



alentour du point immobile A, depuis B vers C juſqu'à ce qu'elle retourne en B, le plan qui ſe trouve terminé par la ligne courbe BCDE, ſe nomme *Cercle*, & cette courbe s'appelle *Circonference*. La ligne AB s'appelle *Rayon*, ou *Demidiametre*, & le point fixe A ſe nomme *Centre* du cercle.

19. On diviſe ordinairement la circonference du cercle en 360. parties égales, dont chacune s'appelle *Degré*, & chaque degré ſe diviſe en 60. autres parties égales appellées *Minutes*, & chaque minute ſe divi-

se en 60. autres parties égales plus petites qu'on appelle *Secondes*, & ainsi en suite. Cette division sert principalement pour determiner la quantité d'un angle : car

20. *La mesure d'un angle rectiligne* ce sont les degrez d'une partie de la circonference d'un cercle quelconque décrit de sa pointe, compris entre les lignes de cet angle. Ainsi pour determiner la quantité de l'angle rectiligne B A C, on décrira de sa pointe A une circonference de cercle quelconque B C, & l'arc B C compris entre les lignes A B, A C, sera la mesure de l'angle A, de sorte que si cet arc B C est par exemple de 20. degrez, on dira que l'angle A est de 20. degrez. Si l'on avoit décrit de la même pointe A un cercle plus grand ou plus petit, l'arc de ce cercle compris entre les mêmes lignes

AB, AC, feroit toûjours de 20 degrez, car il eft bien évident que fi on tire du centre A par les 20 divifions de l'arc BC des lignes droites, elles diviferont cet autre arc en 20 parties, qui en reprefenteront 20 degrez.

21. *Secteur* de cercle c'eft une partie du cercle, terminée par deux Rayons qui ne font pas une même ligne droite, & par une partie de la circonference, comme ABC. Il eft évident que fi les Rayons AB, AC, faifoient une même ligne droite, le fecteur deviendroit un demi-cercle, & qu'ainfi un fecteur de cercle eft neceffairement plus grand ou plus petit qu'un demi-cercle.

H

A

B C

22. *Segment* de cercle, c'eft une partie du cercle, terminée par une

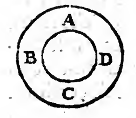
ligne droite qui ne paſſe pas par le centre, & par une partie de la circonference, comme BDC. Il eſt évident que ſi la ligne BD paſſoit par le centre, en ſorte qu'elle fût un diametre, le ſegment deviendroit un demi-cercle, & qu'ainſi un ſegment de cercle eſt neceſſairement plus grand ou plus petit qu'un demi-cercle.

23. *Polygone regulier* c'eſt une figure plane rectiligne de plus de quatre côtez, dont les angles & les côtez ſont égaux. Elle eſt inſcriptible dans un cercle, dont le centre eſt le même que celuy du Polygone, qu'on appelle *Pentagone*, quand il a cinq côtez, *Exagone* quand il en a ſix, *Eptagone* quand il en a ſept, *Octogone* quand il en a huit, *Enneagone* quand il en a neuf, *Decagone* quand il en a dix, *Endecagone* quand

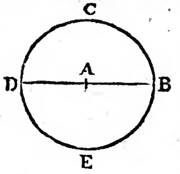
il en a onze, & *Dodecagone* quand il en a douze.

24. *Polygone irregulier* c'eſt une figure plane rectiligne, dont tous les angles ne ſont pas égaux.

25. *Couronne* c'eſt une ſurface plane terminée par les circonferences de deux cercles concentriques, ou qui ont un même centre, comme A B C D.



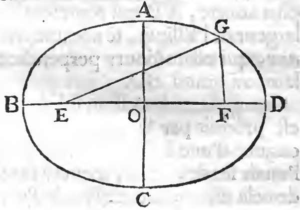
26. *Sphere* ou *Globe*, c'eſt un ſolide qui eſt produit par le mouvement achevé d'un demi-cercle alentour de ſon diametre, lequel à cauſe de cela eſt apellé *Aiſſieu* de la Sphere. Comme ſi alentour du diametre immobile B D, on fait



mouvoir par penſée le demi-cercle BDC, l'eſpace que ce demi-cercle parcourra par ſon mouvement achevé, eſt apellé *Sphere*, dont le *centre* A & le *diametre* BD eſt le même que celuy du demi-cercle generateur.

27. *Zone* c'eſt une partie de la ſurface d'une ſphere, terminée par deux cercles égaux & paralleles entre eux : telle eſt cette partie de terre qu'on appelle *Zone torride*, qui eſt terminée par les deux Tropiques.

28. *Ovale Mathematique*, ou *Ellipſe*, c'eſt une figure plane plus

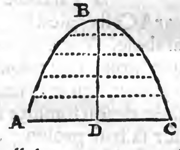


longue que large, terminée par une

ſeule ligne courbe, comme ABCD, au dedans de laquelle il y a ſur la ligne BD, qui en repreſente la longueur, & qu'on nomme *le grand axe*, deux points E, F, également éloignez du *centre* O, milieu de l'axe BD, leſquels on nomme *Foyers*, deſquels tirant à un point quelconque G, de la circonference ABCD, les droites EG, FG, leur ſomme EGF eſt préciſément égale au grand axe BD. Toutes les lignes tirées par le centre O & terminées de part & d'autre à la circonference, ſont appellées *Diametres*, dont la plus courte, AB qui repreſente la largeur de l'Ellipſe, ſe nomme *petit axe*, qui eſt toûjours perpendiculaire au grand BD.

29. *Spheroïde* c'eſt un ſolide, qui eſt produit par la circonvolution entiere d'une Ellipſe à l'entour de l'un de ſes deux axes, lequel à cauſe de cela eſt appellé *Aiſſieu du Spheroïde*.

30. *Parabole* c'eſt une ſurface plane, comme ABC, terminée par la ligne courbe ABC, & par la droite AC apellée *Baſe*, à laquelle tirant au dedans de la Parabole autant de paralleles que l'on voudra, elles ſont toutes diviſées en deux également par le diametre BD, qui diviſe la baſe AC auſſi en deux également, & qu'on nomme *Axe*, quand il eſt perpendiculaire à toutes ces paralleles, qu'on appelle *Ordonnées*, & dont les quarrez ſont proportionels aux parties correſpondantes du diametre BD, en les prenant depuis le *Sommet* B.



31. *Paraboloïde* c'eſt un ſolide produit par la circonvolution entiere d'une Parabole à l'entour de ſon axe, lequel à cauſe de cela eſt appellé

Aiſſieu du Paraboloïde. Il eſt bien évident que la *baſe* de ce Paraboloïde, eſt un cercle, dont le diametre eſt le même que la baſe B D de la Parabole,

A E F B C D

& que la *hauteur* A C eſt égale à l'axe de la même Parabole. Vous prendrez garde que nous entendons par la *hauteur* d'une figure, une ligne droite tirée de ſon ſommet à angles droits ſur ſa baſe prolongée quand il en ſera de beſoin.

32. *Pyramide* c'eſt un ſolide terminé en pointe par une ou pluſieurs ſurfaces décrites par le mouvement d'une ligne droite, qui ſe meut alentour d'un point fixe tout le long de la circonference d'un plan appellé *Baſe de la Pyramide*. Ce point fixe ſe nomme *pointe de la Pyramide*,

qu'on appelle *Tetraëdre*, quand elle eſt compriſe par quatre triangles égaux équilateraux; mais on l'apelle *Cone*, quand ſa baſe eſt un cercle, & quand elle ſe trouve coupée par un plan parallele à ſa baſe, elle s'apelle *Pyramide tronquée.*

33. *Cylindre* c'eſt un ſolide, qui eſt produit par la circonvolution entiere d'un parallelogramme alentour de l'un de ſes côtez, lequel à cauſe de cela eſt appellé *Aiſſieu du Cylindre.*

34. *Cube*, ou *Exaëdre*, c'eſt un ſolide terminé par ſix quarrez égaux.

35. *Priſme* c'eſt un ſolide qui eſt produit par le mouvement en ligne droite d'un plan parallele, égal, & ſemblable à un autre plan, qui ſert de baſe à ce Priſme: & quand ce même plan eſt un parallelogramme, le Priſme ſe nomme *Parallelepipede.*

36. *Corps regulier* c'eſt un ſolide inſcriptible dans une ſphere, & ter-



miné par des surfaces égales, équilaterales, & équiangles. Il y en a seulement de cinq sortes, le *Tetraëdre*, dont nous avons déja donné la definition, *l'Exaëdre*, dont nous avons aussi donné la definition; *l'Octaëdre*, qui est terminé par huit triangles égaux équilateraux; le *Dodecaëdre*, qui est terminé par douze pentagones égaux reguliers; & *l'Icosaëdre*, qui est terminé par vingt triangles égaux équilateraux.

Axiomes.

1. Si à des quantitez égales on ajoûte des quantitez égales, les *sommes* seront égales.

2. Si de quantitez égales on ôte des quantitez égales, les *differences* seront égales.

3. Si on multiplie des quantitez égales par des quantitez égales, les *produits* seront égaux.

4. Si on divise des quantitez égales par des quantitez égales, les

quotiens feront égaux.

5. Les quantitez égales à une même quantité, sont égales entre elles.

6. Tous les angles droits sont égaux entre eux, & chacun est de 90. degrez.

THEOREMES.

1. Dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est de 180. degrez, & l'un des côtez étant prolongé, l'angle exterieur est égal à la somme des deux interieurs opposez, *par*. 32. 1.

2. Dans un triangle rectiligne rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal à la somme des quarrez des deux autres côtez; *par*. 47. 1.

3. Si dans un triangle rectiligne le quarré de l'un des côtez est égal à la somme des quarrez des deux autres côtez, l'angle opposé à ce premier côté sera droit, *par*. 48. 1.

4. Si deux côtez d'un triangle sont égaux, les angles opposez à ces

deux côtez feront auffi égaux, *par*. 5. 1.

5. Si deux angles d'un triangle font égaux, les côtez oppofez à ces deux angles feront auffi égaux *par*. 6. 1.

6. Dans tout triangle le plus grand côté eft oppofé au plus grand angle, *par*. 18. 1. & le plus grand angle eft oppofé au plus grand côté, *par*. 19. 1.

PROBLEMES.

Nous donnerons feulement icy les Problemes qui font abfolument neceffaires pour travailler fur le papier & fur le terrain.

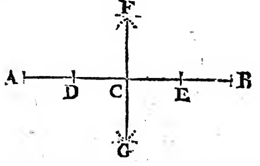
PROBLEME I.

Tirer par un point donné à une ligne donnée une perpendiculaire.

Le point donné peut être dans la ligne donnée, à l'une des extremitez

tremitez de la ligne, ou hors de la ligne donnée. Nous resoudrons chacun de ces trois cas.

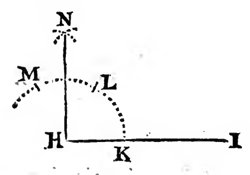
Pour tirer premierement par le point donné C sur la ligne donnée AB une perpendiculaire, prenez



à volonté depuis le point donné C, de part & d'autre sur la ligne donnée AB, les distances égales CD, CE, & décrivez des deux points D, E, avec une ouverture volontaire du compas, qui soit égale, mais plus grande que CD, ou que CE, deux arcs, qui s'entre-coupent icy aux deux points F, G, par lesquels vous menerez la droite FG, qui passera par le point donné C, & se-

ra perpendiculaire à la ligne propoſée A B.

Pour tirer par l'extremité H de la ligne donnée HI, une perpendiculaire, décrivez de l'extremité donnée H avec une ouverture volon-



taire du compas, mais moindre que la ligne donnée HI, une circonference de cercle K L M, qui coupe la ligne donnée H I au point K. Portez la même ouverture du compas ſur l'arc KLM, depuis K en L, & depuis L en M. Décrivez des deux points L, M, avec la même ouverture du compas, ſi vous voulez, deux arcs, qui ſe coupent icy au

point N. Enfin tirez la droite HN, qui ſera la perpendiculaire qu'on cherche.

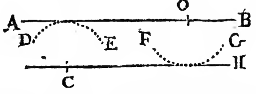
Pour tirer par le point donné O, hors de la ligne donnée PQ, une perpendiculaire, décrivez à diſcretion du point donné O, une circonference, qui coupe la ligne donnée en deux points, comme R, S. Décrivez des deux points R, S, avec une ouverture volontaire du compas, mais égale, deux arcs qui ſe coupent icy au point T. Enfin tirez la ligne OT, qui ſera perpendiculaire à la ligne propoſée PQ.



PROBLEME II.

Tirer par un point donné à une ligne donnée une parallele.

POur tirer par le point donné C à la ligne donnée A B une parallele, décrivez de ce point donné C l'arc DE, qui raze la ligne



donnée A B. Décrivez avec la même ouverture du compas, du point O pris à discretion sur la ligne donnée AB, l'arc FG. Tirez par le point donné C la droite CH, laquelle razant l'arc FG sera parallele à la ligne proposée A B.

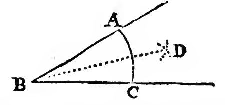
Bien que cette methode soit mecanique, elle est neanmoins excellente pour la pratique, c'est pourquoy nous

ne nous amuserons pas à en donner une autre.

PROBLEME III.

Diviser un arc, & l'angle qu'il mesure en deux également.

POur diviser l'arc AC, ou son angle ABC, en deux également, décrivez des deux extremitez A, C, avec une ouverture volon-

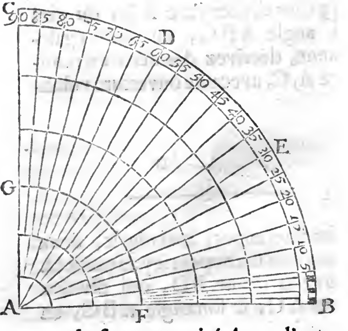


taire du compas, mais égale, deux arcs, qui se coupent icy au point D. Tirez la droite BD, qui divisera l'arc AC, & son angle ABC, en deux également.

PROBLEME IV.

Diviser un Quart de cercle en ses 90. degrez.

AYant tiré la ligne AB d'une longueur volontaire, décri-



vez de son extremité A par l'autre extremité B, l'arc BC, & portez la

même ouverture du compas sur l'arc BC, depuis B, en D. Puis ayant divisé l'arc BD en deux également au point E, portez sa moitié DE sur le même arc BC, depuis D en C, & vous aurez le quart de cercle terminé BC, que vous diviserez en ses 90. degrez par le moyen de ce petit vers,

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

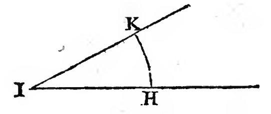
Dont le sens est tel. Divisez premierement le quart de cercle BC en trois parties égales, comme il se trouve déja divisé aux points D, E. Divisez chacune de ces trois parties égales en deux autres, & chacune de ces deux en trois, & enfin chacune de ces trois en cinq, & le quart de cercle BC se trouvera divisé en ses 90. degrez, d'où l'on tirera au centre A des lignes droites, & on achevera le reste comme l'on void dans la figure, pour rendre ce quart

de cercle propre à plusieurs usages, dont les principaux seront icy declarez.

PROBLEME V.

Connoistre de combien de degrez est un angle proposé.

Pour connoistre de combien de degrez est l'angle proposé HIK, décrivez avec l'ouverture de l'un des demi-diametres des cercles décrits dans le quart de cercle precedent, comme avec l'ouverture du



demi-diametre AF du cercle FG, de la pointe I l'arc HK, & portez cet arc HK sur le même cercle FG, & le nombre des degrez, qui se

trouveront entre les pointes du compas, donnera la quantité de l'arc HK, & par consequent de l'angle I.

Ou bien transportez le quart de cercle sur le triangle HIK, en sorte que son centre A convienne avec la pointe I, & la ligne AB avec la ligne IH, & alors la ligne IK prolongée s'il en est de besoin, donnera sur le quart de cercle BC le nombre des degrez de l'angle proposé HIK.

Si vous voulez vous servir du compas de proportion, ayant décrit de la pointe I l'arc HK avec une ouverture volontaire du compas, portez cette même ouverture sur la ligne des cordes de 60. à 60. & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, vous y porterez sur les mêmes cordes l'arc HK, & le nombre égal des degrez où cette ouverture s'accordera de part & d'autre, donnera la quantité de l'arc HK,

ou de ſon angle HIK.

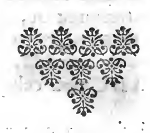
SCOLIE.

On peut par une operation toute contraire, faire au point d'une ligne donnée un angle d'autant de degrez que l'on voudra, ou bien prendre ſur la circonference d'un cercle donné un arc, dont le nombre des degrez eſt preſcrit. Comme s'il eſt propoſé de faire au point I de la ligne donnée IH un angle de 30. degrez, décrivez du point I l'arc HK, comme auparavant, & ayant pris ſur le même cercle FG l'ouverture de 30. degrez, portez la ſur l'arc HK depuis H en K, & menez la droite IK, pour avoir en I un angle de 30. degrez.

Ou bien appliquez le centre A de vôtre quart de cercle ſur le point I, en ſorte que la ligne AB convienne avec la ligne IH; & le quart de cercle demeurant ainſi arrêté, marquez un point ſur vôtre papier

vis-à-vis le 30. degré du quart de cercle BC, & tirez par ce point au point donné I la droite IK, qui fera en I avec la ligne propoſée IH un angle de 30. degrez.

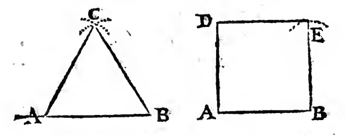
Ayant à vous ſervir du compas de proportion, décrivez du point donné I l'arc HK d'une ouverture volontaire, que vous porterez ſur les cordes de 60. à 60, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur les mêmes cordes la diſtance de 30. à 30, ſi vous voulez un angle de 30. degrez, & la portez ſur l'arc HK, comme auparavant.



PROBLEME VI.

Décrire sur une ligne donnée un triangle équilateral & un quarré.

PRemierement pour décrire sur la ligne donnée A B un triangle équilateral, décrivez avec l'ou-



verture de la ligne donnée AB, de ses deux extremitez A, B, deux arcs qui se coupent icy au point C, & menez les droites AC, BC, & le triangle ABC sera celuy qu'on cherche.

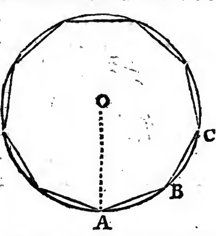
Pour décrire un quarré sur la ligne donnée AB, tirez par l'une de ses extremitez A la droite A D égale & perpendiculaire à la même li-

gne donnée AB. Faites de deux points D, E, avec l'ouverture de la ligne donnée AB, deux arcs qui se coupent icy au point E, & menez les droites BE, DE.

PROBLEME VII.

Décrire un polygone regulier dans un cercle donné.

Pour décrire un polygone dans le cercle donné ABC, dont le demi-diametre est AO, prenez avec un compas de proportion ou autrement, l'arc AB, d'autant de degrez qu'en doit avoir l'angle du centre



du Polygone, ſçavoir de 72 degrez pour un Pentagone, de 60. pour un Exagone, de 51. 26. pour un Eptagone, &c. & la corde A B ſera le côté du Polygone qu'on cherche.

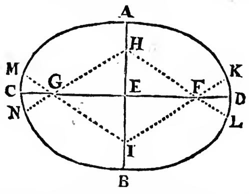
L'angle du centre d'un Polygone ſe trouve en diviſant 360. degrez par le nombre des côtez du Polygone, ſçavoir par 5. pour un Pentagone, par 6. pour un Exagone, par 7. pour un Eptagone, &c.

Si vous voulez vous ſervir du compas de proportion, accommodez le rayon AO de 6. à 6. ſur la ligne des Polygones, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des Polygones l'ouverture de 5 à 5 pour un Pentagone, de 7. à 7. pour un Eptagone, de 8. à 8. pour un Octogone, &c. & cette ouverture donnera le côté du Polygone qu'on cherche.

PROBLEME VIII.

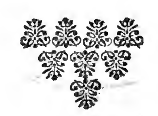
Alentour de deux diametres donnez décrire une ovale commune.

NOus ſuppoſons que les deux diametres donnez AB, CD, ſe coupent à angles droits & en deux également au point E, qui ſera le centre de l'ovale. Prenez ſur le grand diametre CD les lignes EF, EG, égales chacune à l'excez de



ce grand diametre CD ſur le plus petit AB, & ſur le plus petit AB les lignes EH, EI, égales chacune

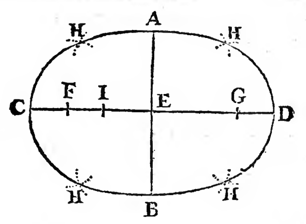
aux deux tiers du même excés, c'est à dire de EF, ou de EG. Aprés cela tirez des points H, I, par les points F, G, les lignes IFL, IFK, qui seront terminées en K & en L, en décrivant du point F par le point D l'arc KDL, & les lignes HGN, IGM, qui feront terminées en M & en N, en décrivant du point G par le point C l'arc MCN. Enfin décrivez du point H par les points L, N, l'arc LBN, qui passera par le point B, & du point I par les points M, K, l'arc MAK, qui passera par le point A, & vous aurez l'ovale parfaite ABCD.



PROBLEME IX.

Alentour de deux axes donnez décrire une ovale Mathematique.

NOus ſuppoſons comme auparavant, que les deux diametres donnez AB, CD, ſe coupent à angles droits & en deux également



au point E, qui ſera le centre de l'Ellipſe. Portez le grand demi axe EC, ou ED, depuis l'extremité A, ou B, du petit AB, ſur le grand CD, de part & d'autre, aux points

F, G, qui seront les Foyers de l'Ellipse qu'on veut décrire, par le moyen desquels on en trouvera autant de points que l'on voudra en cette sorte. Décrivez des Foyers F, G, avec une ouverture du compas une plus grande que FC, ou que GD, de côté & d'autre de petits arcs, & portez cette même ouverture sur le grand axe CD, depuis son extremité C en I; & le compas étant ouvert du reste de l'axe ID, décrivez des mêmes Foyers F, G, d'autres arcs, qui coupent icy les precedens aux points H, qui seront de l'Ellipse. C'est de la même maniere qu'on en trouvera autant d'autres points qu'on voudra, lesquels étant joints par une ligne courbe, l'Ellipse se trouvera décrite.

Scolie.

C'est à peu prés de cette même façon que les ouvriers décrivent une Ellipse sur terre, en plantant

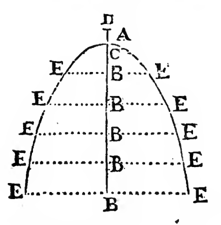
deux clous aux Foyers F, G, & en attachant à ces deux clous deux cordeaux liez & égaux ensemble au grand axe CD: car ainsi étendant ces deux cordeaux, & les faisant mouvoir alentour des deux clous où ils sont attachez, ils décrivent tout d'un coup l'Ellipse.

PROBLEME X.

Décrire une Parabole sur un axe donné.

Pour décrire une Parabole par le point A de l'axe donné AB, prenez sur cet axe AB prolongé, les lignes égales AC, AD, grandes ou petites, selon que vous voudrez une Parabole plus ou moins ouverte. Prenez sur le même axe AB au dessous du sommet A autant de points B differens que vous voudrez trouver de points de la Parabole. Tirez par ces points B sur le même axe AB les perpendiculaires EE,

ſur leſquelles on marquera les points E de la Parabole en portant les



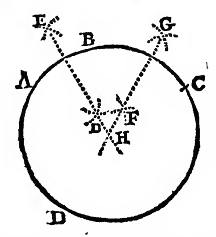
diſtances DB depuis le Foyer C de part & d'autre ſur leurs perpendiculaires correſpondantes.

PROBLEME XI.

Faire paſſer par trois points donnez une circonference de cercle.

Il ne faut pas que les trois points donnez A, B, C, ſoient en ligne droite, autrement le Probleme ſe-

roit impoſſible. Décrivez des deux points A, B, avec une ouverture

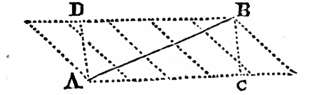


volontaire du compas, deux arcs de côté & d'autre, & par leurs points de ſection D, E, menez la droite DE. Faites-en autant des deux points B, C, & par les points de ſection F, G, menez la droite FG, qui coupe icy la premiere DE au point H, qui ſera le centre du cercle, qu'on veut décrire. Si donc on décrit du centre H par le point donné A une circonference de cercle, elle paſſera par les deux autres points donnez B, C.

PROBLEME XII.

Diviser une ligne donnée en parties égales.

SI vous voulez divifer la ligne donnée AB, par exemple en cinq parties égales, décrivez de l'extremité A par l'autre extremité B, l'arc BC d'une grandeur volontaire, & de l'extremité B par l'extremité A l'arc AD égal au prece-



dent BC. Menez les droites indefinies AC, BD, pour y parcourir depuis leurs extremitez A, B, cinq parties égales d'une grandeur volontaire. Menez par les points de divifion oppofez des lignes droites,

qui diviſeront la ligne propoſée AB en cinq parties égales.

Si vous voulez vous ſervir du compas de proportion, portez la longueur de la ligne donnée AB ſur la ligne des parties égales, en ſorte qu'elle réponde de côté & d'autre à un même nombre qui ſoit diviſible par cinq, comme à 100. & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, l'ouverture de 20. à 20. qui ſont la cinquiéme partie de 100. ſera auſſi la cinquiéme partie de la ligne propoſée AB.

SCOLIE.

Par le moyen de ce Probleme on conſtruira aiſément une Echelle propre à y prendre de grandes meſures & leurs parties aliquotes, entre leſquelles celles qui procedent de 10 en 10 ſont les plus commodes dans l'uſage. Comme ſi on veut diviſer la ligne AB en 7. toiſes, & chaque toiſe en 10. parties égales,

& chaque dixiéme partie en 10. autres parties égales plus petites, en

sorte qu'on veüille construire une Echelle dans laquelle on puisse prendre exactement les centiémes parties d'une toise. Divisez en premier lieu la ligne A B en 7. parties égales, dont chacune representera une toise, & divisez l'une de ces parties, c'est à dire une toise en 10. parties égales, pour avoir les dixiémes

mes parties d'une toiſe : Mais pour avoir les dixiémes parties de ces dix dernieres, c'eſt à dire les centiémes parties d'une toiſe, faites ainſi.

Tirez à volonté des extremitez A, B, les deux paralleles indefinies AD, BC, & y prenez 10 parties égales d'une grandeur volontaire. Menez par les points de diviſion oppoſez des lignes, qui ſeront égales & paralleles à la ligne AB, dont la derniere ſera CD, ſur laquelle on tranſportera les toiſes de la ligne AB, & on tirera par les points de diviſion oppoſez des lignes égales & paralleles aux deux AD, BC, qui diviſeront le parallelogramme AB CD en 7 autres parallelogrammes plus petits. Tranſportez encore les dix parties égales de la premiere diviſion B1 de la ligne AB ſur la premiere CG de la ligne CD, & menez des lignes droites & paralleles entre elles d'un point à l'autre, en ſorte que la premiere paſſe par le

point C, & la derniere par le point 1, & l'Echelle sera parfaite, dont l'usage sera tel.

Pour prendre sur l'Echelle, par exemple 6 toises & $\frac{2}{10}$ vous les prendrez sur la ligne A B, depuis A jusques au point 2 : & pareillement pour prendre 6 toises & $\frac{8}{10}$, vous les prendrez sur la même ligne A B depuis le point A jusques au point 8. Mais si outre ces $\frac{8}{10}$ vous voulez prendre $\frac{3}{100}$ vous les prendrez sur la troisiéme parallele à la ligne AB, depuis la ligne AD jusqu'à la ligne 8 R, &c.

Nous n'avons pas donné la demonstration de toutes ces pratiques, parce qu'elles sont communes, & que la demonstration n'est pas difficile à trouver à ceux qui entendent les Elemens d'Euclide.

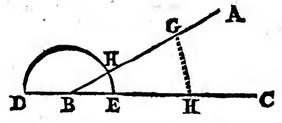


PROBLEME XIII.

Mesurer un angle accessible sur la terre.

UN angle accessible sur la terre se peut mesurer en plusieurs manieres, entre lesquelles nous choisirons celles qui sont les plus commodes, & de plus grand usage.

Proposons en premier lieu l'angle accessible A B C dans l'air, ou



sur la terre, que nous supposerons imaginaire, comme si l'œil en B regardoit les deux points A, C, par les deux rayons visuels B A, B C, qui font au point B l'angle imaginaire A B C. Cet angle A B C peut être

connu tres-facilement par le moyen du Demi-cercle, dont les Ingenieurs se servent ordinairement. Car si on place le centre du Demi-cercle à la pointe B de l'angle ABC, en sorte que son diametre DE convienne avec l'une des deux lignes BA, BC, comme avec la ligne BC, ce qui arrivera lorsque par les trous des deux pinules qui sont sur le diametre DE, on pourra voir le point C. Aprés cela le demi-cercle demeurant ainsi arrêté, on tournera la regle du Demi-cercle vers l'autre point A, en sorte que par les trous des deux pinules, qui sont sur la même regle, on puisse voir le point A; & l'arc EF du Demi-cercle, compris entre le diametre & la regle, donnera la quantité de l'angle proposé ABC.

C'est de la même façon que l'on mesurera un angle réel sur terre, comme seroit l'angle de deux murailles: mais quand on n'a point de

demi-cercle, on pourra prendre tres-facilement cet angle par le moyen de la Table ſuivante, que nous avons tirée de la fortification du Comte de Pagan.

Prenez ſur les côtez BA, BC, les deux lignes BG, BH, chacune de 30 pieds, & meſurez la baſe GH, qui ſoit par exemple de 20 pieds & 4 pouces: cherchez dans la Table la baſe de 20 pieds & 4 pouces, & vous trouverez qu'il luy répond environ 39^{d}. 38^{m}. pour la quantité de l'angle propoſé ABC.

TABLE DES ANGLES PLANS, *toûjours compris par deux côtez de 30 pieds.*

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
0	2	0	19
0	4	0	38
0	6	0	57
0	8	1	8
0	10	1	36
1	0	1	55
1	2	2	24
1	4	2	33
1	6	2	52
1	8	3	11
1	10	3	30
2	0	3	49
2	2	4	8
2	4	4	28
2	6	4	47
2	8	5	6
2	10	5	25
3	0	5	44
3	2	6	3
3	4	6	22
3	6	6	41
3	8	7	0
3	10	7	20

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
4	0	7	39
4	2	7	58
4	4	8	17
4	6	8	36
4	8	8	55
4	10	9	14
5	0	9	34
5	2	9	53
5	4	10	12
5	6	10	31
5	8	10	50
5	10	11	9
6	0	11	29
6	2	11	48
6	4	12	8
6	6	12	27
6	8	12	46
6	10	13	5
7	0	13	24
7	2	13	43
7	4	14	2
7	6	14	22
7	8	14	41
7	10	15	0

Bases		Angles	
Pied.	Pouce	D.	M.
8	0	15	20
8	2	15	39
8	4	15	58
8	6	16	18
8	8	16	37
8	10	16	56
9	0	17	15
9	2	17	34
9	4	17	54
9	6	18	13
9	8	18	32
9	10	18	52
10	0	19	11
10	2	19	30
10	4	19	50
10	6	20	19
10	8	20	29
10	10	20	48
11	0	21	8
11	2	21	27
11	4	21	46
11	6	22	6
11	8	22	25
11	10	22	45

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
12	0	23	5
12	2	23	24
12	4	23	44
12	6	24	3
12	8	24	32
12	10	24	42
13	0	25	1
13	2	25	21
13	4	25	41
13	6	26	1
13	8	26	20
13	10	26	40
14	0	26	59
14	2	27	18
14	4	27	38
14	6	27	58
14	8	28	18
14	10	28	38
15	0	28	57
15	2	29	17
15	4	29	37
15	6	29	56
15	8	30	16
15	10	30	36

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
16	0	30	56
16	2	31	16
16	4	31	36
16	6	31	56
16	8	32	16
16	10	32	35
17	0	32	55
17	2	33	15
17	4	33	35
17	6	33	55
17	8	34	15
17	10	34	35
18	0	34	55
18	2	35	15
18	4	35	35
18	6	35	55
18	8	36	15
18	10	36	35
19	0	36	55
19	2	37	15
19	4	37	36
19	6	37	56
19	8	38	16
19	10	38	36

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
20	0	38	56
20	2	39	17
20	4	39	38
20	6	39	58
20	8	40	18
20	10	40	38
21	0	40	59
21	2	41	19
21	4	41	40
21	6	42	0
21	8	42	20
21	10	42	40
22	0	43	1
22	2	43	22
22	4	43	42
22	6	44	3
22	8	44	24
22	10	44	44
23	0	45	5
23	2	45	26
23	4	45	46
23	6	46	7
23	8	46	28
23	10	46	48

Bases		Angles	
Pied.	Pouce	D.	M.
24	0	47	9
24	2	47	30
24	4	47	51
24	6	48	12
24	8	48	33
24	10	48	54
25	0	49	15
25	2	49	36
25	4	49	57
25	6	50	18
25	8	50	39
25	10	51	0
26	0	51	21
26	2	51	42
26	4	52	3
26	6	52	24
26	8	52	4
26	10	53	8
27	0	53	29
27	2	53	51
27	4	54	12
27	6	54	34
27	8	54	55
27	10	55	16

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce.*	D.	M.
28	0	55	38
28	2	56	0
28	4	56	22
28	6	56	43
28	8	57	5
28	10	57	26
29	0	57	48
29	2	58	10
29	4	58	32
29	6	58	54
29	8	59	16
29	10	59	38
30	0	60	0
30	2	60	22
30	4	60	44
30	6	61	6
30	8	61	28
30	10	61	50
31	0	62	13
31	2	62	35
31	4	62	58
31	6	63	20
31	8	63	43
31	10	64	5

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
32	0	64	28
32	2	64	50
32	4	65	13
32	6	65	36
32	8	65	58
32	10	66	21
33	0	66	44
33	2	67	7
33	4	67	30
33	6	67	53
33	8	68	16
33	10	68	39
34	0	69	2
34	2	69	25
34	4	69	48
34	6	70	12
34	8	70	35
34	10	70	59
35	0	71	22
35	2	71	46
35	4	72	10
35	6	72	33
35	8	72	56
35	10	73	20

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce.*	D.	M.
36	0	73	44
36	2	74	8
36	4	74	32
36	6	74	56
36	8	75	20
36	10	75	44
37	0	76	9
37	2	76	33
37	4	76	57
37	6	77	22
37	8	77	46
37	10	78	9
38	0	78	35
38	2	79	0
38	4	79	25
38	6	79	50
38	8	80	15
38	10	80	40
39	0	81	5
39	2	81	30
39	4	81	35
39	6	82	20
39	8	82	46
39	10	83	12

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
40	0	83	37
40	2	84	3
40	4	84	29
40	6	84	54
40	8	85	20
40	10	85	46
41	0	86	13
41	2	86	39
41	4	87	5
41	6	87	32
41	8	87	58
41	10	88	25
42	0	88	51
42	2	89	18
42	4	86	45
42	6	90	12
42	8	90	39
42	10	91	6
43	0	91	33
43	2	92	1
43	4	92	29
43	6	92	56
43	8	93	24
43	10	93	52

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
44	0	94	20
44	2	94	48
44	4	95	16
44	6	95	45
44	8	96	13
44	10	96	42
45	0	97	11
45	2	97	40
45	4	98	9
45	6	98	38
45	8	99	8
45	10	99	37
46	0	100	6
46	2	100	36
46	4	101	6
46	6	101	36
46	8	102	7
46	10	102	37
47	0	103	8
47	2	103	39
47	4	104	10
47	6	104	41
47	8	105	12
47	10	105	44

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
48	0	106	16
48	2	106	48
48	4	107	20
48	6	107	52
48	8	108	25
48	10	108	57
49	0	109	30
49	2	110	4
49	4	110	37
49	6	111	11
49	8	111	44
49	10	112	18
50	0	112	53
50	2	113	28
50	4	114	3
50	6	114	38
50	8	115	14
50	10	115	49
51	0	116	26
51	2	117	2
51	4	117	39
51	6	118	16
51	8	118	53
51	10	119	31

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
52	0	120	9
52	2	120	47
52	4	121	26
52	6	122	6
52	8	122	45
52	10	123	25
53	0	124	6
53	2	124	47
53	4	125	28
53	6	126	10
53	8	126	52
53	10	127	35
54	0	128	19
54	2	129	3
54	4	129	48
54	6	130	33
54	8	131	19
54	10	132	6
55	0	132	53
55	2	133	44
55	4	134	30
55	6	135	20
55	8	136	11
55	10	137	3

Bases		Angles	
Pied.	*Pouce*	D.	M.
56	0	137	57
56	2	138	49
56	4	139	44
56	6	140	40
56	8	141	38
56	10	142	36
57	0	143	36
57	2	144	39
57	4	145	43
57	6	146	48
57	8	147	57
57	10	149	8
58	0	150	20
58	2	151	36
58	4	152	55
58	6	154	19
58	8	155	48
58	10	157	22
59	0	159	3
59	2	160	53
59	4	162	54
59	6	165	12
59	8	167	48
59	10	171	28

PROBLEME XIV.

Mesurer un angle inaccessible sur la terre.

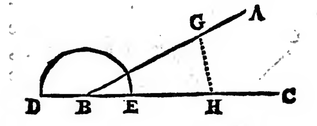
Pour mesurer l'angle inaccessible A, dont on peut voir les deux côtez AB, AC, plantez un piquet en quelque lieu commode, comme en D, en sorte que les trois points D, A, C, soient en ligne droite, & un autre au point E, en sorte que pareillement les trois points E, A, B, soient en ligne droite. Mesurez par le Probleme precedent, les angles accessibles D, E, & ôtez leur somme de 180 degrez, il est évident par 32. 1. que le reste sera la quantité

de l'angle A qu'on cherche.

PROBLEME XV.

Faire à un point donné d'une ligne donnée ſur la terre un angle d'une grandeur donnée.

SOit le point donné B dans la ligne donnée BC ſur la terre, & qu'il faille faire à ce point B avec



ligne donnée BC, un angle qui ſoit par exemple de 45 degrez. Ayant poſé le demi-cercle, comme la figure vous montre, & comme il a eſté dit au *Probl.* 13. Mettez la regle mobile ſur le 45. degré, en comptant les degrez depuis E, &

faites planter sur terre un piquet en quelque lieu commode, comme en A, en sorte que ce piquet puisse être vû par les deux pinules qui sont sur la regle; il est évident par la mesure de l'angle, que l'angle ABC, qui se trouvera ainsi sur la terre sera de 45 degrez, comme il estoit proposé.

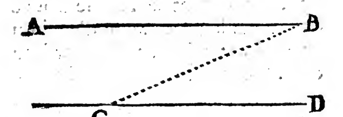
Si vous n'avez point de demi-cercle, servez-vous de la table precedente, & faites ainsi. Plantez un piquet en H sur la ligne donnée BC, en sorte que BH soit toûjours de 30 pieds. Plantez encore au point B un piquet, pour y attacher un cordeau long de 30 pieds, c'est à dire égal à BH, & parce qu'il est proposé de faire en B un angle de 45 degrez dont la base se trouve dans la table precedente d'environ 23 pieds, attachez en H un cordeau de 23 pieds, & l'étendez jusqu'à ce qu'il rencontre le cordeau qui part du point B, & qui doit aussi être étendu, en quelque point, comme

en G, où vous planterez un piquet, & alors l'angle GBH, qui se forme ainsi sur la terre, sera necessairement de 45 degrez, à cause des deux côtez BG, BH, qui sont de 30 pieds, & de la base GH de 23 pieds, telle que doit être la base d'un angle de 45 degrez.

PROBLEME XVI.

Tirer par un point donné à une ligne donnée accessible sur la terre une parallele.

POur tirer à la ligne donnée AB accessible au point B, par le



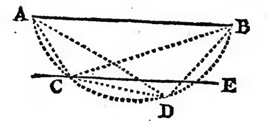
point donné C, une parallele, mesurez

rez par le *Probl.* 13. l'angle acceſſible ABC, & par le Probleme precedent faites au point C avec la ligne CB l'angle BCD égal au precedent ABC, par la ligne CD, laquelle par 27. 1. ſera parallele à la ligne propoſée AB.

PROBLEME XVII.

Tirer par un point donné à une ligne donnée inacceſſible ſur la terre, une parallele.

POur tirer à la ligne donnée inacceſſible AB, par le point don-



né C, une parallele, meſurez par

D

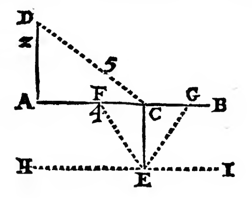
Probl. 13. l'angle accessible ACB, & choisissez sur terre le point D, en sorte que l'angle ADB soit égal au precedent ACB, afin que les quatre points A,C,D,B, soient dans la circonference d'un même cercle, par l'inverse de 21. 3. Aprés cela faites, par *Probl.* 15. au point C, avec la ligne CB, l'angle BCE égal à l'angle accessible ADC, par la droite CE, qui sera parallele à la proposée AB.

Car puisque les deux angles égaux ACB, ADB, sont dans un même segment de cercle, l'angle ADC, ou BCE son égal, sera égal à l'angle ABC, par. 21.3. C'est pourquoy, par. 27. 1. les lignes AB, CE, seront paralleles.

PROBLEME XVIII.

Tirer par un point donné à une ligne donnée accessible sur la terre, une perpendiculaire.

PRemierement si le point donné A est sur la ligne donnée AB, on luy tirera une perpendiculaire par le point donné A, en faisant



par *Probl.* 15. au même point A, un angle de 90. degrez, par la droite AD, laquelle par consequent sera perpendiculaire à la proposée AB, ou bien en cette sorte.

Ayant pris ſur la ligne donnée AB depuis A juſques en C, la longueur de 4. toiſes, attachez au point donné A un cordeau long de 3. toiſes ; & au point C un autre cordeau long de 5. toiſes. Il eſt évident par 48. 1. que ſi on étend ces deux cordeaux, en ſorte qu'on joigne enſemble leurs deux extremitez, on aura le point D de la perpendiculaire qu'on cherche.

Mais ſi le point eſt donné hors de la ligne donnée, comme E, on y attachera un cordeau d'une longueur volontaire, pourvû qu'il ſoit aſſez long, pour pouvoir étant étendu couper la ligne donnée AB, en deux points, comme F, G, ce qu'il ne ſera pas difficile de faire, quand même la ligne propoſée AB ne ſera que par imagination. Car ſi on diviſe la diſtance FC en deux également au point C, la ligne EC ſera la perpendiculaire qu'on cherche, à cauſe des deux triangles égaux

ECF, ECG, &c.

PROBLEME XIX.

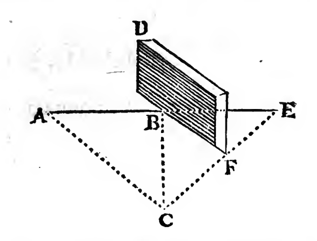
Tirer par un point donné à une ligne donnée inacceſſible ſur la terre, une perpendiculaire.

POur tirer par la ligne donnée inacceſſible AB, de la figure precedente, une perpendiculaire par le point donné E, tirez par ce même point donné E à la ligne donnée AB, la parallele HI, par *Probl.* 16. à laquelle on tirera par *Probl.* 18. par le même point donné E, la perpendiculaire EC, qui ſera auſſi perpendiculaire à la ligne donnée AB, par 29. 1.

PROBLEME XX.

Prolonger une ligne donnée ſur la terre, lorſqu'il y a quelque empêchement.

IL ſeroit facile par la vûë de prolonger la ligne donnée AB au delà du point B, ſi la muraille FD ne ſervoit d'obſtacle, tant pour ti-



rer la ligne, que pour conduire la vûë; dans ce cas, on tirera, par *Probl.* 18. à la ligne AB, par le point B, pris à diſcretion ſur cette même

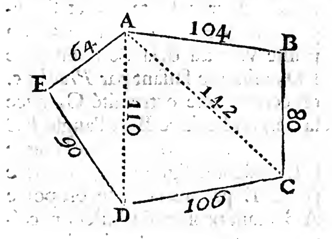
ligne, la perpendiculaire BC, d'une longueur volontaire, & si longue que de son extremité C on puisse voir au delà de la muraille FD, afin que faisant par *Probl.* 15. en cette même extremité C, avec la perpendiculaire BC, l'angle BCE égal à l'angle BCA, par la ligne CE égale à la ligne CA, on ait le point E par où la ligne proposée AB étant prolongée passera necessairement, à cause du triangle BCE égal au triangle ABC, &c.

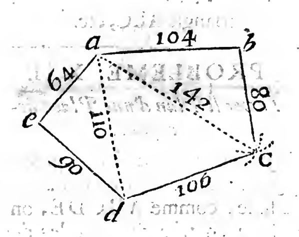
PROBLEME XXI.

Lever le Plan d'une Place accessible.

PRemierement si l'on peut entrer au dedans de la Place accessible, comme ABCDE, on la reduira en triangles par les deux diagonales AC, AD, dont on mesurera la longueur, aussi bien que celle des côtez : nous les suppose-

rons icy d'autant de toises que





vous les voyez marquez dans la figure.

Pour décrire sur le papier un plan

ſemblable au propoſé ABCDE, on racourcira chaque triangle, l'un aprés l'autre, pour avoir ainſi tout le plan racourcy & ſemblable au grand. Pour cette fin preparez une échelle de toiſes, grande ou petite, ſelon la grandeur que vous voudrez donner aux lignes du plan que vous voulez repreſenter ſur le papier. Aprés cela tirez ſur le papier la ligne a b de 104. parties priſes ſur l'échelle, pour les 104. toiſes du grand côté AB. Décrivez en ſuite du point b un arc à l'ouverture de 80. parties pour les 80. toiſes du côté B C, qui avec le premier AB forme le triangle ABC, & un autre du point b à l'ouverture de 142. parties pour les 142. toiſes de la diagonale AC, & la ſection de ces deux arcs donnera le point c, qui repreſentera le point C de la grande figure : c'eſt pourquoy ſi on tire les lignes c a, c b, on aura le triangle a b c ſemblable au grand ABC. C'eſt de la

même façon que l'on racourcira le triangle ſuivant ACD, & en ſuite le triangle ADE, pour avoir ainſi toute la figure propoſée reduite en petit volume.

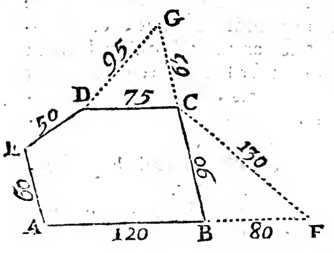
Si la figure propoſée eſt bornée par quelques lignes courbes, prenez ces lignes courbes pour droites, quand il y aura peu de difference: autrement rendez-les comme inſenſibiles par pluſieurs petites lignes droites, que vous formerez auprés du bord de la figure, pour la partager en triangles, & pour achever le reſte comme nous venons de dire.

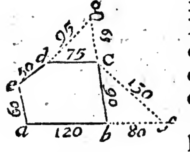
S'il n'eſt pas permis d'aller au dedans de la figure, en ſorte qu'on ne puiſſe pas meſurer les diagonales, on levera le plan par le dehors, en meſurant les côtez avec un cordeau, ou mieux avec une chaîne, & les angles avec un demi cercle: aprés quoy on tracera ce plan ſur le papier, en prenant ſes côtez d'au-

tant de parties prifes fur l'échelle qu'ils auront de toifes, & en faifant fes angles tels qu'on les aura trouvez fur le terrain; car ainfi ces deux figures, la grande fur le terrain, & la petite fur le papier feront femblables, à caufe de l'égalité de leurs angles, & de la proportion de leurs côtez.

Mais comme il eft aifé de manquer, tant en prenant les angles fur la terre, qu'en les décrivant fur le papier, & qu'une petite erreur à l'égard des angles apporte une difference confiderable, il vaudra mieux fe fervir de la methode fuivante, qui m'a toûjours bien réüffi, lorfque j'ay pris un peu de foin à la bien executer.

Propofons donc le plan ABCD EF, qui foit feulement acceffible par le dehors, ce qui n'empêchera pas qu'on ne puiffe mefurer les côtez que nous fuppoferons d'autant de toifes que vous le voyez icy





marqué. Prolongez l'un des côtez, comme AB, en F, d'une diſtance volontaire, comme de 80. toiſes, plus ou moins ſelon la commodité du terrain, & la longueur de l'autre côté BC, qui ne doit pas être beaucoup different de la ligne BF, pour lever le plan plus exactement, & meſurez la ligne FC, qui ſoit par exem-

ple de 130. toises. Prolongez aussi à volonté le côté BC en G, comme de 65. toises, & mesurez la ligne GD, que nous supposerons de 95. toises. Vous pourriez aussi prolonger le côté suivant CD, & les autres par ordre, s'il en restoit beaucoup, mais comme il ne reste icy que les trois côtez CD, DE, AE, ce que nous avons fait suffit pour representer ce Plan sur le papier en cette sorte.

Tirez sur le papier la ligne ab de 120. parties prises sur l'échelle, pour les 120. toises du grand côté AB, & la prolongez en f, en sorte que bf soit de 80. parties pour les 80. toises de la ligne BF. Faites un arc du point f à l'ouverture de 130. parties pour les 130 toises de la ligne FC, & un autre du point b à l'ouverture de 90. parties pour les 90. toises du côté BC, & par la section c de ces deux arcs menez le côté bc, que vous prolongerez en g, en

ſorte que c g ſoit de 65. parties pour les 65. toiſes de la ligne CG, & décrivez comme auparavant, un arc du point g à l'ouverture de 95. parties pour les 95. toiſes de la ligne GD, & un autre du point c à l'ouverture de 75. parties pour les 75. toiſes du côté CD, & par la ſection d de ces deux arcs tirez le côté c. Enfin décrivez un arc du point e, à l'ouverture de 50. parties, pour les 50. toiſes du côté DE, & un autre du point a à l'ouverture de 60. parties pour les 60. toiſes du dernier côté AE, & par la ſection e de ces deux arcs, menez les côtez d e, a e, & la figure a b c d e ſera ſemblable à la propoſée ABCDE, à cauſe de la proportion de leurs côtez & de l'égalité de leurs angles.

Il y a pluſieurs autres manieres pour lever le Plan d'une Place acceſſible, mais comme elles ne me ſemblent pas ſi faciles ny ſi exactes que celles que je viens d'enſeigner, nous

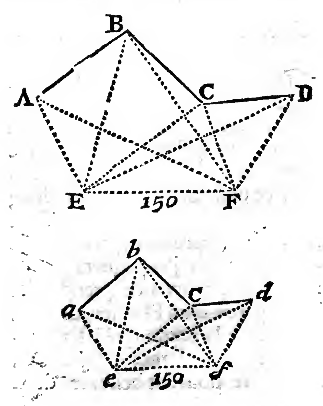
n'en parlerons pas davantage. Neanmoins nous ajoûterons ſur la fin du dernier Probleme une autre methode pour lever le Plan d'une Place, lors que l'on peut aller en dedans.

PROBLEME XXII.

Lever le Plan d'une Place inacceſſible.

ON a auſſi pluſieurs manieres pour lever le Plan d'une Place inacceſſible, entre leſquelles je mettray icy ſeulement celle qui me ſemble la plus facile & la plus aſſurée: & pour ne pas être trop long à expliquer cette maniere qu'il eſt facile de comprendre, parce qu'elle eſt fort ſimple, j'enſeigneray ſeulement icy le moyen de prendre de loin la partie d'un Plan inacceſſible, comme de la partie qui eſt terminée par les trois lignes AB, BC, CD, le reſte ſe pouvant achever de la même façon.

Ayant choiſi ſur terre un point commode, comme E, le plus proche de la place qu'il ſera poſſible, regardez tous les angles du Plan, qui ſe preſenteront à vôtre vûë, par les rayons viſuels EA, EB, EC, ED, & meſurez avec un Demi-cercle



les angles AEB, AEC, AED. Aprés cela faites une seconde station en F, en sorte que de ce point F on puisse voir les mêmes angles qu'auparavant, afin qu'on puisse connoistre de la même façon la quantité des angles visuels EFA, EFB, EFC, EFD. Enfin mesurez l'angle AEF, & la distance des stations EF, que nous supposerons de 150. toises, & il sera bon de la faire la plus grande qu'on pourra, de peur que les rayons visuels qui partent des points E, F, ne se coupent trop obliquement, parce que dans ce cas il seroit difficile de bien réüssir en racourcissant sur le papier la figure ABCDEF, ce qui se fera ainsi.

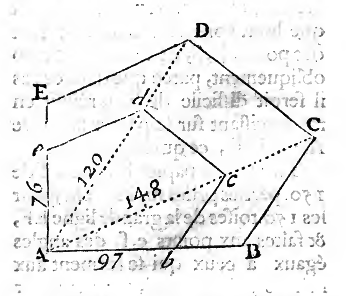
Tirez sur le papier la ligne e f de 150. parties prises sur l'échelle, pour les 150. toises de la grande ligne EF, & faites aux points e, f, des angles égaux à ceux qui se forment aux mêmes points, E, F, sur terre, par des lignes droites, qui s'entrecou-

pent icy aux points a, b, c, d, & tout ſera fait ſi on tire les lignes a b, b c, c d, qui repreſenteront les grandes lignes AB, BC, CD, &c.

PROBLEME XXIII.

Tracer un Plan ſur la terre.

POur tracer le Plan a b c d e ſur le terrain, & premierement en un lieu qui ſoit libre & ſans empê-



chement, attachez ce Plan ſur quel-

que piece de bois polie & soûtenuë d'un bâton haut de trois ou de quatre pieds, avec une regle mobile alentour de l'un des angles de ce plan, comme alentour de l'angle a, & écrivez le nombre des toises qu'il y aura depuis cet angle a à tous les angles de la figure, ce que l'on connoistra facilement en transportant ces distances sur l'échelle particuliere du plan. Aprés cela ayant posé le bâton avec son plan au lieu où l'on veut commencer à tracer le Plan sur terre, & ayant tourné le côté ab selon la situation que l'on veut donner au plan, arrêtez ainsi le Plan abcde, & tournant la regle sur chacun des angles, & premierement sur l'angle b, contez en ligne droite en regardant par les pinules que la regle doit avoir, depuis le bâton autant de toises qu'il y en aura sur la ligne ab, comme icy 97, & marquez sur terre le point B, qui representera le point b du

petit plan : & si vous en faites autant à l'égard des autres angles c,d, e, le plan proposé a b c d e se trouvera tracé exactement sur le terrain.

Par une operation toute contraire, il sera facile de lever le Plan a B CDE, en tournant la regle vers les angles B,C,D,E, & en prenant le long de la même regle autant de parties prises sur l'échelle qu'il y aura de toises depuis l'angle a à tous les autres angles, pour avoir les angles b, c, d, e. Cela est si clair de soy-même, que j'aurois honte d'en parler davantage.

Si le lieu où l'on veut tracer le Plan est empêché, comme si l'on vouloit tracer une fortification alentour d'une ville remplie de maisons, il faudroit connoistre les angles du Plan, & faire les mêmes angles sur terre, en marquant en même temps les côtez d'autant de toises qu'ils seront sur le Plan, ce que l'on pourra aisément connoistre par le moyen de son échelle particuliere.



PREMIERE PARTIE.

DE LA TRIGONOMETRIE RECTILIGNE.

LA Trigonometrie Rectiligne est une partie de la Geometrie Pratique, laquelle par le moyen des nombres resoud toute sorte de triangles rectilignes. Elle ne considere que six choses dans un triangle, les trois angles & les trois côtez, car ce n'est pas à la Trigonometrie de mesurer l'aire d'un triangle, mais bien à la Planimetrie.

Le but de la Trigonometrie est de connoistre par le calcul, l'une de six parties d'un triangle, trois de ces mêmes parties étant auparavant connuës, qui doivent être telles qu'elles determinent les autres par-

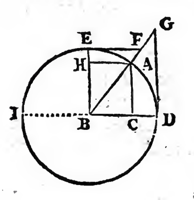
ties du triangle, en ſorte que ces trois autres parties ne puiſſent être que d'une grandeur, pour ne pas travailler à l'incertain, ce que feront toûjours deux angles & un côté ou deux côtez & un angle, ou bien les trois côtez, mais non pas les trois angles, parce que l'on peut faire une infinité de triangles, qui auront les angles égaux les uns aux autres, & non pas les côtez. Car ſi dans le triangle ABC on en fait un autre DEF, & autant d'autres que l'on voudra, dont les côtez ſoient paralleles aux côtez de celuy-cy, ils ſeront tous équiangles, & neanmoins ils auront les côtez inégaux. Ainſi vous voyez que la ſeule connoiſſance des angles ne ſuffit pas pour determiner les côtez, tant par ce qui vient d'être demontré, que parce que quand on a les trois an-

gles connus, on n'a proprement que deux choses connuës, & non pas trois, car deux angles étant connus, ou supposez connus, le troisiéme s'ensuit d'une certaine grandeur, ne m'étant pas libre de le supposer tel que je le voudray, parce qu'il est le reste des deux precedens à 180. degrez.

CHAPITRE I.

DEFINITIONS.

1 LA mesure d'un angle rectiligne, c'est l'arc d'un cercle quelconque compris entre les lignes de cet angle, & ayant son centre à la pointe du même an-



gle. Ainsi la mesure de l'angle AB D, est l'arc AD, qui a son centre à la pointe B.

2. Le Sinus d'un arc ou d'un angle, c'est une droite tirée de l'une des extremitez de cet arc, perpendiculairement sur le diametre qui passe par l'autre extremité du même arc. Ainsi on connoistra que le Sinus de l'arc AD, ou de son angle ABD, est la droite AC, & que le Sinus de l'arc AE est la droite AH.

3. La Tangente d'un arc ou d'un angle, c'est une droite tirée de l'une des extremitez de l'arc, perpendiculairement sur le diametre qui passe par la même extremité, & terminée à la rencontre d'une ligne droite tirée du centre par l'autre extremité du même arc. Ainsi on connoistra que la Tangente de l'arc AD est la droite DG, & que la Tangente de l'arc AE est la droite EF.

4. La Secante d'un arc ou d'un angle

angle n'eſt autre choſe que cette ligne droite tirée du centre par l'autre extremité de l'arc, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Tangente. Ainſi on connoiſtra que la Secante de l'arc AD eſt la droite BG, & que la Secante de l'arc AE eſt la droite BF.

5. Vous prendrez garde que tout Sinus, toute Tangente, & toute Secante, appartiennent à deux arcs, leſquels pris enſemble font toûjours un Demi-cercle, ou 180. degrez. Ainſi on void évidemment par la definition du Sinus, que la droite AC eſt auſſi-bien le Sinus de l'arc AD que de l'arc AI, leſquels pris enſemble font le Demi-cercle DEI. Il en eſt de même de la Tangente & de la Secante, comme nous avons demontré ailleurs dans nôtre grand Traité de Trigonometrie.

6. Le complement d'un arc ou d'un angle, c'eſt ce de quoy il dif-

fere du quart de cercle, ou de 90. degrez, soit par defaut ou par excez. Ainsi le complement de l'arc A D est l'arc AE, par lequel il differe du quart du cercle DE, & le complement de l'arc A I est le même arc A E, par lequel il differe du quart de cercle E I. C'est pourquoy la droite A H sera dite le Sinus du complement de l'arc AD, & du même arc A D la Tangente du complement sera la droite EF, & la Secante du complement sera B F.

7. Le Rayon, ou le Sinus Total, c'est le Sinus de l'angle droit, ou de 90. degrez, lequel est toûjours égal au Demi-diametre, & c'est pour cela qu'il est appellé *Rayon*; & on le nomme *Sinus Total*, parce qu'il est le plus grand de tous les Sinus. Ainsi la droite E B étant le Sinus du quart de cercle DE, ou EI, ou de l'angle droit DBE, ou EBI, est appellé Rayon, ou Sinus Total, lequel est bien égal au Demi-dia-

metre BD, ou BI, comme vous voyez.

On void évidemment que la quantité de toutes ces lignes depend de celle du Sinus Total, ou du Demi-diametre du cercle qu'on a décrit. Ainſi le Sinus, la Tangente, & la Secante de quelque arc que ce ſoit ont au Sinus Total une certaine raiſon qui ne change jamais. C'eſt pourquoy ayant une fois connu la quantité des Sinus des Tangentes & des Secantes de tous les degrez du quart de cercle, pour un Sinus Total d'une grandeur determinée, on les pourra connoiſtre facilement par la Regle de trois pour un Sinus Total de quelqu'autre grandeur qu'on le voudra ſuppoſer.

Au reſte il faut ſçavoir que les Anciens diviſoient le Rayon en 60. parties égales, & dans ces mêmes parties ils cherchoient la quantité des Sinus de tous les degrez du

quart de cercle. Mais comme ce nombre de 60. parties ſeulement eſt trop petit pour avoir au juſte & ſans une erreur ſenſible la quantité des Sinus, à cauſe des fractions que l'on neglige, & des nombres irrationaux, qui ſe rencontrent ordinairement dans cette ſupputation; les modernes ont ſuppoſé le Rayon de beaucoup plus de parties, afin que l'erreur qui doit provenir des nombres irrationaux & des fractions negligées ne ſoit pas ſenſible dans un ſi grand nombre de parties: & ils le ſuppoſent ordinairement de 10000000 de parties, & dans cette hypotheſe ils ont ſupputé la quantité des Sinus des Tangentes & des Secantes, non ſeulement de tous les degrez du quart de cercle, mais encore de toutes les minutes, dont ils ont fait des Tables communément appellées les *Tables de Sinus*, qu'un Geometre doit ſouvent avoir entre les mains.

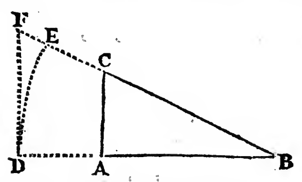
CHAPITRE II.

THEOREMES.

THEOREME I.

Dans un triangle rectangle, la raison d'un côté à l'autre côté est égale à celle du Rayon à la Tangente de l'angle opposé à cet autre côté.

SOit du Triangle ABC rectangle en A; le côté AB prolongé en D, en sorte que BD soit le Sinus



Total, ou le Demi-diametre de l'arc DE, lequel étant décrit du centre

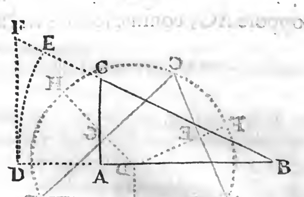
B eſt la meſure de l'angle ABC, par *Defin.* 1. Tirez du point D ſur le Rayon BD, la perpendiculaire DF, qui ſe trouvera terminée en F par l'hypotenuſe prolongée BC, & alors on connoiſtra, par *Defin.* 3. qu'elle eſt la Tangente de l'arc DE, ou de l'angle B. Cela étant je dis que le côté AB eſt à l'autre côté AC, comme le Rayon BD, à la Tangente DF de l'angle B oppoſé à l'autre côté AC. Cela eſt évident par 4. 6. parce qu'il eſt évident que les deux triangles rectangles ABC, DBF, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle commun B, & des deux angles droits A, D, &c.



THEOREME II.

Dans un triangle rectangle, la raison d'un côte à l'hypotenuse, est égale à celle du Rayon à la Secante de l'angle adjacent à ce côté.

SI l'on fait une preparation semblable à la precedente, on connoistra par *Defin.* 4. que la ligne BF



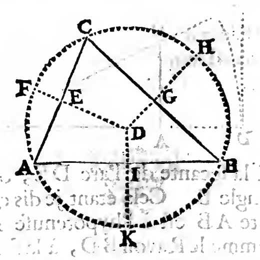
est la secante de l'arc DE, ou de l'angle B. Cela étant je dis que le côté AB est à l'hypotenuse BC, comme le Rayon BD, à la secante BF de l'angle B adjacent à ce côté

AB. Cela eſt auſſi évident par 4. 6. à cauſe des triangles ſemblables ABC, DBF.

THEOREME III.

Dans un triangle, les Sinus des angles ſont proportionnels à leurs côtez oppoſez.

Je dis que dans le triangle ABC, le ſinus de l'angle B eſt à ſon côté oppoſé AC, comme le ſinus de l'an-



gle C, à ſon côté oppoſé AB, &

comme le ſinus de l'angle A, à ſon côté oppoſé BC. Car ſi par les trois points A, B, C, on fait paſſer une circonference de cercle, & que de ſon centre D on tire ſur chacun des côtez les perpendiculaires DF, DH, DK, elles diviſeront ces mêmes côtez en deux également aux points E, G, I, par 3. 3. & leurs arcs auſſi en deux également aux points F, H, K; & parce que chacun de ces arcs eſt double de ſon angle oppoſé, par 20. 3. leurs moitiez ſeront les meſures de ces mêmes angles, c'eſt-à-dire que l'arc AF ſera la meſure de l'angle B, l'arc AK la meſure de l'angle C, & l'arc BH la meſure de l'angle A; & encore parce que les ſinus des trois arcs AF, AK, BH, ou des angles B, C, A, ſont les trois lignes AE, AI, BG, moitiez des côtez AC, AB, BC, & que ces moitiez ſont en même raiſon que les côtez, puiſqu'elles en ſont de ſemblables parties aliquo-

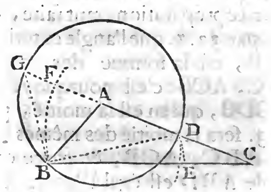
tes, il s'ensuit que la ligne AE, ou le sinus de l'angle B est à son double AC, qui est le côté opposé à l'angle B, comme la ligne AI, ou le sinus de l'angle C, à son double AB, qui est le côté opposé à l'angle C, & comme la ligne BG, ou le sinus de l'angle A, à son double BC, qui est le côté de l'angle opposé à l'angle A. Ce qu'il faloit demontrer.

Si le triangle ABC, étoit rectangle, en sorte que l'un de ses angles, comme A fût droit, le centre D du cercle conviendroit avec le point de milieu G de l'hypotenuse BC, par 31. 3. & la ligne BG étant le Demi-diametre du cercle, seroit le sinus de l'angle droit, ou de l'angle opposé A, & la demonstration se feroit de la même façon.

THEOREME IV.

Dans un triangle Scalene, la ſomme de deux côtez eſt à leur difference, comme la Tangente de la moitié de la ſomme des angles oppoſez à ces deux côtez, à la Tangente de la moitié de leur difference.

JE dis que dans le triangle Scalene ABC, la ſomme des deux côtez AB, AC, eſt à leur difference,



comme la Tangente de la moitié de la ſomme des deux angles BC, oppoſez aux deux mêmes côtez AB, AC, à la Tangente de la moi-

tié de la difference des mêmes angles.

Pour la demonſtration, décrivez de l'angle A à l'intervalle du plus petit côté AB, une circonference de cercle, qui coupant l'autre côté AC prolongé, donnera CG la ſomme des côtez AB, AC, & CD leur difference. Menez les droites BG, BD, & la droite DE parallele à BG. Enfin décrivez du point D par le point B, l'arc BF, & un autre arc du point B par le point D.

Cette preparation étant faite, on void par 32. 1. que l'angle exterieur GAB, eſt la ſomme des angles ABC, ACB: c'eſt pourquoy l'angle GDB, qui en eſt la moitié, par 20. 3. ſera la moitié des mêmes angles ABC, ACB, & parce que l'angle ABD eſt égal à l'angle ADB, par 5. 1. il s'enſuit que l'angle ABD eſt auſſi la moitié de la ſomme des angles ABC, ACB. De plus l'angle GBD étant dans un

Demi-cercle eſt droit, par 31. 3. c'eſt pourquoy par 29. 1. l'angle BDE ſera auſſi droit. Ainſi à l'égard du même Rayon BD, la ligne BG ſera la Tangente de l'angle BDG, ou de la moitié de la ſomme des angles ABC, ACB, & la ligne DE ſera la Tangente de l'angle DBC, qui eſt égal à la moitié de la difference des mêmes angles ABC, ACB, parce qu'il eſt ce de quoy le plus grand ABC ſurpaſſe la moitié de la ſomme des angles ABD, & ce de quoy le plus petit ACB eſt moindre que la moitié de la même ſomme des angles ADB, à cauſe que cet angle ADB eſt égal, par 32. 1. aux deux DBC, ACB.

Nous ſçavons donc, que CG eſt la ſomme des côtez AB, AC, & que CD eſt leur difference. Nous ſçavons auſſi que BG eſt la Tangente de la moitié de la ſomme des angles ABC, ACB, & que DE eſt

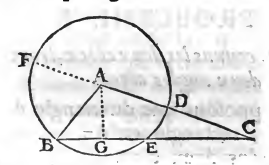
la Tangente de la moitié de leur difference: & parce que ces quatre lignes CG, CD, BG, DE, ſont proportionnelles, à cauſe des triangles ſemblables GBD, DEC, il s'enſuit que la ſomme des côtez, AB, AC, eſt à leur difference, comme la Tangente de la moitié de la ſomme des angles ABC, ACB, à la Tangente de la moitié de leur difference. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME V.

Dans un triangle Scalene, le plus grand côté eſt à la ſomme des deux autres, comme leur difference à la difference des Segmens du plus grand côté, faits par la perpendiculaire, qui tombe du plus grand angle.

Je dis que ſi du plus grand angle A du triangle ABC, on tire ſur le plus grand côté BC, la perpen-

diculaire AG, & qu'on décrive comme auparavant, du même angle A, à l'ouverture du plus petit côté AB, une circonference de cercle, le plus grand côté BC est à la



somme CF des deux côtez AB, AC, comme leur difference CD, à la difference CE des Segmens BG, CG.

Car puisque le rectangle BCE est égal au rectangle FCD, par 35. 3. il suit par 14. 6. que les quatre lignes BC, CF, CD, CE, sont proportionnelles. Ce qu'il faloit demontrer.

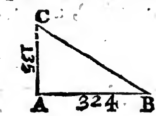
CHAPITRE III.

DU CALCUL DES TRIANGLES RECTANGLES.

PROBLEME I.

Etant connus les deux côtez, trouver les deux angles aigus.

SUpposons que du triangle A B C, rectangle en A, on connoisse les deux côtez A B, A C, que nous mettrons d'autant de toises que vous les voyez marquez icy dans la figure. Pour trouver l'un des deux angles



aigus B, C, comme B, faites cette analogie,

Comme le côté adjacent AB,	324
Au côté opposé AC;	135
Ainsi le Sinus Total	100000
A un quatrième nombre	41666

Lequel sera la Tangente de l'angle B, par *Theor.* 1. à laquelle il répond dans les Tables environ 22. 37. pour la quantité de l'angle B, dont le complement se trouve vis à vis dans l'autre page, sçavoir 67. 23. pour l'autre angle C, qu'on peut aussi trouver par cette analogie,

Comme le côté adjacent AC 135
Au costé opposé AB 324
Ainsi le Rayon 100000
A la Tãgẽte de l'angle C 240000

lequel se trouvera de 67. 23. comme auparavant.

PROBLEME II.

Estant connus les angles, & l'un des costez, trouver l'autre costé.

Nous supposerons icy les deux angles aigus B, C, du triangle rectangle A B C d'autant de degrez

& de minutes que vous les voyez icy marquez, & le côté AC de 324. pieds. Pour trouver l'autre côté AB, faites, par *Theor.* 1. cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
A la Tangente de l'angle C adjacent au costé connu AC 41666
Ainsi le costé connu AC 324
Au costé qu'on cherche AB 135

Ou bien faites, par *Theor.* 3. cette autre analogie,

Comme le Sinus de l'angle B 92309
A son costé opposé AC 324
Ainsi le Sinus de l'angle C 38456
A son costé opposé AB 135

PROBLEME III.

Estant connus les angles, & un costé, trouver l'hypotenuse.

Les angles aigus B, C, du triangle rectangle precedent ABC, étant supposez connus, comme auparavant, & le côté AC de 324 pieds, on trouvera l'hypotenuse BC, en faisant, par *Theor.* 2. cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
A la Secante de l'angle C adjacent au costé connu AC 108330
Ainsi le costé connu AC 324
A l'hypotenuse BC 351

ou bien en faisant par *Theor.* 3. cette autre analogie,

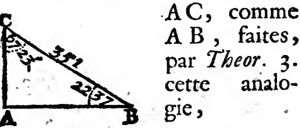
Comme le Sinus de l'angle B 92309
A son costé opposé AC 324

Ainsi le Sinus de l'angle A 100000
A son costé opposé BC 351

PROBLEME IV.

Estant connus les angles & l'hypotenuse, trouver celuy qu'on voudra des deux costez.

NOus supposerons icy les deux angles aigus B, C, de la même grandeur qu'auparavant, & l'hypotenuse BC de 351 pieds. Pour trouver l'un des deux côtez AB, AC, comme AB, faites, par *Theor.* 3. cette analogie,



Comme le Sinus Total 100000

A l'hypotenuse BC 351
Ainsi le Sinus de l'angle C 92309
A son costé opposé AB 324

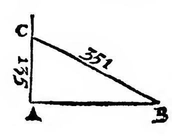
ou bien faites, par *Theor.* 2. cette autre analogie,

Cõme la Secãte de l'angle B 108330
Au Rayon 100000
Ainsi l'hypotenuse BC 351
Au costé AB 324

PROBLEME V.

Estant connuë l'hypotenuse & un costé, trouver les angles aigus.

POur trouver les angles aigus B, C, & premierement l'angle C du triangle rectangle ABC, par le moyen du côté connu AC, & de l'hypotenuse aussi connuë B C, que



nous ſuppoſerons d'autant de pieds, que vous les voyez icy marquez, faites par *Theor.* 2. cette analogie,

Comme le coſté connu A C 135
A l'hypotenuſe connuë BC 351
Ainſi le Rayon 100000
A la Secante de l'angle C 260000

qui ſe trouvera de 67. 23. dont le complement donnera 22. 37. pour l'autre angle B, que l'on peut auſſi trouver, en faiſant par *Theor.* 3. cette analogie,

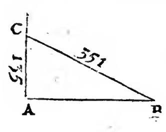
Comme l'hypotenuſe BC 351
Au coſté connu A C 135
Ainſi le Rayon 100000
Au Sinus de l'angle B 38461

qui ſe trouvera d'environ 22. 37. comme auparavant.

PROBLEME VI.

Estant connuë l'hypotenuse & un costé, trouver l'autre costé.

POur trouver le costé AB du triangle rectangle ABC, par le moyen de l'autre côté connu AC de 135. pieds, & de l'hypotenuse BC aussi connuë de 351. pieds, on trouvera les angles aigus B, C, par le Probleme precedent, & par *Probl.* 2. ou 4. on pourra trouver le côté AB qu'on cherche.



Ou bien multipliez l'hypotenuse BC par elle-même, pour avoir son quarré 123201. Multipliez aussi le côté connu AC par luy-même, pour avoir son quarré

18225, lequel étant ôté du premier quarré 123201, le reste 104976 sera le quarré du côté A B, par 47. 1. c'est pourquoy si on prend la racine quarrée de ce reste, on aura 324 pieds pour la quantité du côté AB qu'on cherche.

Ou bien encore ajoûtez le côté connu AC à l'hypotenuse BC pour avoir leur somme 486. Ostez le même côté connu AC de l'hypotenuse connuë BC, pour avoir leur difference 216. Multipliez ensemble cette somme 486 & cette difference 216. pour avoir leur produit 104976. dont la racine quarrée donnera 324 pieds, comme auparavant, pour la quantité du côté A B, qu'on cherche.

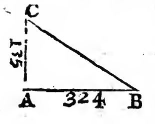
Il suit de cette regle, que la moitié de la somme des Logarithmes, de la somme & de la difference de l'hypotenuse BC & du côté connu AC, est le Logarithme de l'autre côté AB, qu'on cherche.

PRO-

PROBLEME VII.

Estant connus les deux costez, trouver l'hypotenuse.

POur trouver l'hypotenuse BC du triangle rectangle ABC, par le moyen des deux côtez connus AB de 324. pieds, & AC de 135. pieds, on trouvera premierement les angles aigus B, C, par *Probl.* 1. aprés quoy on poura trouver l'hypotenuse BC qu'on cherche, par *Probl.* 3.



Ou bien multipliez les côtez connus AB, AC, chacun par luy-même, pour avoir leurs quarrez 18225, 104976, dont la somme 123201. est le quarré de l'hypotenuse BC, par 47. 1. c'est pourquoy si on prend la racine quarrée de cette somme, on

aura 351. pieds, pour la quantité de l'hypotenuſe BC, qu'on cherche.

Ou bien encore ajoûtez enſemble les deux côtez connus AB, AC, pour avoir leur ſomme 459. dont le quarré eſt 210681. Multipliez enſemble les deux mêmes côtez AB, AC, pour avoir leur produit 43740, dont le double eſt 87480, lequel étant ôté du precedent quarré 210681, il reſtera 123201, dont la racine quarrée donnera 351. pieds, comme auparavant, pour l'hypotenuſe BC qu'on cherche.

Nous n'avons pas icy donné la demonſtration de cette pratique, ny de la derniere du Probleme precedent, parce qu'elle eſt facile à trouver.



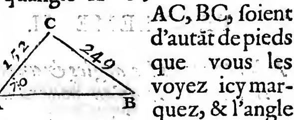
CHAPITRE IV.

DU CALCUL DES TRIANGLES OBLIQUANGLES.

PROBLEME I.

Estant connus deux costez & l'angle opposé à l'un des deux, trouver l'angle opposé à l'autre.

SUpposons que du triangle obliquangle ABC, les deux côtez AC, BC, soient d'autāt de pieds que vous les voyez icy marquez, & l'angle



A opposé au côté connu BC d'autant de degrez aussi qu'il est icy marqué. Pour trouver l'angle B opposé à l'autre côté connu AC, faites, par *Theor.* 3. cette analogie.

Comme le costé BC 249

Au Sinus de son angle opposé A 93969

Ainsi le costé AC 152

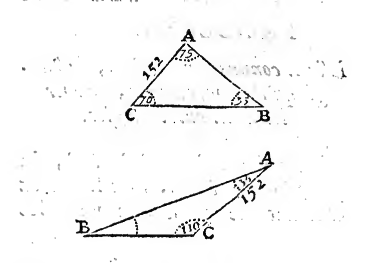
Au Sinus de son angle opposé B 57362

qui se trouvera d'environ 35. degrez, lorsqu'il sera aigu; & quand il sera obtus, on ôtera ces 35. degrez trouvez de 180. degrez, & le reste donnera 145. degrez pour la quantité de l'angle B obtus.

PROBLEME II.

Estant connus les angles & un costé, trouver celuy qu'on voudra des deux autres costez.

LEs angles du triangle ABC étant supposez d'autant de degrez que vous les voyez icy marquez, & le côté AC de 152. pieds, on trouvera les deux autres côtez



AB, AC, comme AB, en faisant, par *Theor.* 3. cette analogie,

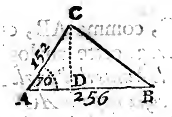
Comme le Sinus de l'angle B 57362
A son costé opposé AC 152
Ainsi le Sinus de l'angle C 93969
A son costé opposé AB 249

Parce que l'angle C est obtus dans la seconde figure, on le doit ôter de 180. degrez, & il restera 70. degrez, dont le Sinus est le même que celuy de 110, par *Defin.* 5. ce qui fait que le côté AB se trouve de même grandeur dans chaque triangle.

PROBLEME III.

Estant connus deux costez, & l'angle qu'ils comprennent, trouver les deux autres angles.

LEs deux côtez AB, AC, du triangle ABC, sont supposez d'autant de pieds que vous les



voyez icy marquez, & l'angle A de 70. degrez. Pour trouver chacun des deux autres angles B, C, ôtez l'angle connu A de 180. degrez, & la moitié du reste donnera 55. degrez pour la moitié de la somme des deux angles inconnus B, C: & pour trouver la moitié de leur difference,

on fera, par *Theor.* 4. cette analogie.

Comme la somme des costez AB, AC 408
A leur difference 104
Ainsi la Tangente de la moitié de la somme des angles B,C, 142814
A un quatriéme nombre 36403

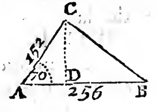
qui sera la Tangente de la moitié de la difference des deux angles B, C, à laquelle Tangente il répond dans les Tables environ 20. degrez pour la moitié de la difference des deux angles B, C, laquelle étant ôtée & ajoûtée à la moitié de leur somme 55, on aura le plus petit angle B de 35. degrez, & le plus grand angle C de 75. degrez.

Ces deux mêmes angles B, C, se peuvent trouver autrement, sans se servir du *Theor.* 4. comme vous allez voir dans le Probleme suivant.

PROBLEME IV.

Estant connus deux costez, & l'angle qu'ils comprennent, trouver le troisiéme costé.

LEs deux côtez AB, AC, & l'angle A, du triangle ABC, sont supposez connus, comme auparavant, & il est proposé de trou-



ver le troisiéme côté BC. On trouvera, par le Probleme precedent, les deux angles B, C, & par *Probl.2.* on pourra trouver le côté BC, qu'on cherche.

Ou bien tirez de l'un des deux angles inconnus B, C, comme de l'angle C, sur son côté opposé AB,

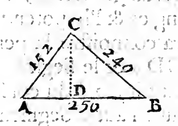
la perpendiculaire CD, & dans le triangle rectangle ADC, connoissant les angles & l'hypotenuse AC, on pourra connoistre la perpendiculaire CD, & le Segment AD, lequel étant icy ôté du côté connu AB, on aura l'autre Segment DB. Ainsi dans le triangle rectangle CDB, connoissant les deux côtez CD, DB, on pourra connoistre & les angles & le côté BC, qu'on cherche.

PROBLEME V.

Estant connus les trois costez, trouver les angles.

POur trouver les angles A, B, C, du triangle ABC, dont les côtez sont supposez d'autant de pieds que vous les voyez icy marquez, tirez du plus grand angle C sur le plus grand côté AB, la perpendiculaire CD, qui le divisera en deux Segmens

AD, BD, que nous trouverons en



faisant premierement, par *Theor*. 5. cette analogie,

Comme le plus grand Costé AB 256.
A la somme des deux autres costez, CA, CB 401.
Ainsi leur difference 97
A la difference des Segmens AD, BD, 152.

laquelle étant ajoûtée au plus grand côté AB, la moitié de la somme donnera 204. pour le plus grand Segment DB, & étant ôtée du même plus grand côté AB, la moitié du reste donnera 52. pour le plus petit Segment AD. Et dans chacun des deux triangles rectangles ADC, BDC, connoissant un côté & l'hy-

potenuſe, on pourra connoiſtre par *Probl. 5. chap.* 3. les angles A, B, dont les complemens étant ajoûtez enſemble donneront le troiſiéme angle C.

Nous avons donné dans nôtre grand Traité de Trigonometrie, une autre methode pour reſoudre ce Probleme: mais la methode la plus facile de toutes eſt la ſuivante, dont la demonſtration étant trop longue, nous nous contenterons icy d'en expliquer ſimplement la pratique.

Ajoûtez enſemble les trois côtez connus, & de la moitié de leur ſomme ôtez chacun des deux côtez qui comprennent l'angle qu'on cherche, comme ſi on cherche l'angle C, on ôtera de cette moitié $328\frac{1}{2}$ les deux côtez AC, BC, pour avoir les deux differences $176\frac{1}{2}$, $79\frac{1}{2}$; Aprés cela faites ces deux analogies,

Comme le premier coſté AC 152

A la premiere difference	$176\frac{1}{2}$
Ainsi l'autre difference	$79\frac{1}{2}$
A un quatriéme nombre	$92\frac{191}{608}$
Comme l'autre costé BC	249
Au quatriéme nombre trouvé	$92\frac{191}{608}$
Ainsi le Rayon	100000
A un septiéme nombre	$37073\frac{504}{577}$

lequel étant multiplié par le Sinus Total 100000. la Racine quarrée du produit donnera 60888. pour le Sinus de la moitié de l'angle qu'on cherche, laquelle se trouvera d'environ 37.30. dont le double donnera par consequent 75. degrez pour la quantité de l'angle proposé C.

Quand on travaillera par Logarithmes, ce qui est icy tres-commode, on ajoûtera le Logarithme du Sinus Total au Logarithme du septiéme nombre trouvé, & la moitié de la somme sera le Sinus de la moitié de l'angle qu'on cherche.



SECONDE PARTIE.

DE LA LONGIMETRIE.

LA Longimetrie, ou la mesure des longueurs, considere les lignes à mesurer en trois façons differentes : car elles peuvent être *Horizontales*, c'est à dire paralleles à l'Horizon ; *Panchantes*, c'est à dire inclinées à l'Horizon ; & *Verticales*, c'est à dire perpendiculaires à l'Horizon : & ces trois peuvent être *accessibles* & *inaccessibles*. Les *accessibles* sont celles dont on peut s'aprocher, & que l'on peut presque toûjours mesurer actuellement: & les *inaccessibles* sont celles dont on ne peut pas s'aprocher, & que par consequent on ne peut mesurer qu'à l'ai-

de de quelque instrument, dont le plus commode est le Demi-cercle, dont nous enseignerons l'usage dans les Problemes suivans, où nous nous servirons plûtost de la Trigonometrie que du Compas & de la Regle, parce que c'est le chemin le plus court & le plus assuré.

Auparavant que de venir à la pratique, il faut sçavoir que les lignes se mesurent par d'autres lignes plus petites, qu'on appelle *Mesures*, qui sont differentes dans les païs differens. La plus petite de toutes les mesures, dont on se sert ordinairement, & qui est comme l'origine de toutes les autres, est la largeur d'un grain d'orge, qu'on appelle *Ligne*.

Douze lignes font un *Pouce*.

Douze Pouces font un *Pied*.

Un Pied & demy fait une *Coudée*.

Deux Pieds & demy font le *Pas commun*.

Deux pas communs ou cinq Pieds

font le *Pas Geometrique*.

Six Pieds font une *Toise*, ou *Brasse*.

Cent vingt cinq pas Geometriques font le *Stade* des Grecs.

Huit Stades, ou mille pas Geometriques, font le *Mille* d'Italie, que l'on marquoit autrefois par une pierre de taille, d'où vient le mot *lapidem*, quand on disoit *ad primum lapidem*, pour dire, au premier mille.

Un Pas Geometrique mis en pendule fait en une heure 1846. vibrations simples. D'où il est aisé de recouvrer la longueur du même Pas Geometrique, si elle estoit perduë, ou alterée, par l'experience commune, qui nous apprend que *les longueurs de deux pendules sont reciproquement proportionnelles aux quarrez des nombres de leurs vibrations en tems égal.*

Faites un pendule d'une longueur connuë, en la prenant depuis le centre de mouvement jusques au

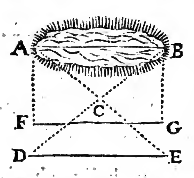
centre du poids ſpherique, qui eſt ſuſpendu à l'extremité du pendule, & qui doit être le même que celuy du pas Geometrique mis en pendule, afin que ces deux pendules ſoient à peu prés d'une même peſanteur. Aprés cela contez le nombre des vibrations ſimples, que ce pendule fera pendant une heure: il eſt évident que ſi ce nombre eſt égal à celuy des vibrations du pas Geometrique, c'eſt à dire à 1846, la longueur de ce même pendule ſera égale à celle du pas Geometrique, lequel par conſequent ſera connu: autrement on le pourra connoiſtre par cette analogie,

Comme le quarré du nombre des vibrations du pas Geometrique,
Au quarré du nombre des vibrations du pendule;
Ainſi la longueur du même pendule,
A la longueur du pas Geometrique.

PROBLEME I.

Mesurer une ligne Horizontale accessible des deux côtez.

Bien que la ligne A B soit accessible des deux côtez A & B, on suppose neanmoins qu'on ne puisse pas aller tout au long, comme si elle representoit la largeur d'un Etang, ou l'épaisseur d'un bois : autrement il seroit facile de la mesurer actuellement avec un cordeau, ou mieux avec une chaîne.



Choisissez sur le terrain un point commode, comme C, & mesurez les deux lignes CA, CB, que vous prolongerez en D, & en E, en for-

te que les deux lignes CD, CE, soient égales aux deux CA, CB, & mesurez la ligne DE, laquelle par 4. 1. sera égale à la ligne AB, qu'on cherche.

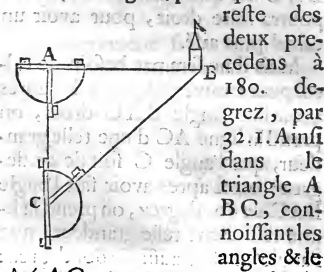
Ou bien tirez à volonté des deux extremitez A & B, deux lignes égales & paralleles AF, BG, & mesurez la ligne FG, laquelle, par 33. 1. sera égale à la ligne AB qu'on cherche.

PROBLEME II.

Mesurer une ligne horizontale accessible seulement d'un côté.

On suppose que la ligne horizontale AB est seulement accessible du côté de A, où par consequent vous pourrez faire avec un Demi-cercle l'angle BAC, de telle grandeur qu'il vous plaira, selon la commodité du terrain, comme de 30. degrez, par la ligne AC, qui

pourra aussi être de telle grandeur que l'on voudra, comme de 144. pieds. Aprés quoy faisant une seconde station en C, on pourra encore mesurer avec le Demi-cercle l'angle ACB, que nous supposerons de 130. degrez, & alors le troisiéme angle B inaccessible se trouvera de 20. degrez, parce qu'il est le reste des deux precedens à 180. degrez, par 32. 1. Ainsi dans le triangle ABC, connoissant les angles & le côté AC, on pourra trouver le côté, ou la ligne AB qu'on cherche, par cette analogie.



Comme le Sinus de l'angle B 34202.

A son costé opposé AC 144.

Ainsi le Sinus de l'angle C 76604
A son côté opposé AB 324

Cette methode ne m'a jamais manqué sensiblement, & elle réüssira toûjours bien, pourvû que dans le triangle ABC, il n'y ait point d'angle trop aigu, ny trop obtus; & comme il est libre de faire l'angle BAC tel que l'on voudra, on le pourra faire droit, pour avoir un calcul plus aisé.

Mais il ne sera pas besoin de calcul pour trouver la ligne AB, si aprés avoir fait l'angle BAC droit, on prend la ligne AC d'une telle grandeur, que l'angle C soit de 45. degrez: ou si aprés avoir fait l'angle BAC de 60. degrez, on prend la ligne AC d'une telle grandeur, que l'angle C soit aussi de 60. degrez: ou plus generalement si aprés avoir fait l'angle BAC tel que l'on voudra, on prend la ligne AC d'une telle grandeur, que l'angle C soit le complement de la moitié de l'an-

gle A; car dans tous ces cas le triangle ABC deviendra Isoscele, & la ligne AC sera égale à la longueur AB qu'on cherche.

PROBLEME III.

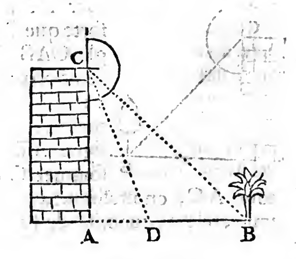
Mesurer d'enhaut une ligne inaccessible.

PRemierement si la ligne inaccessible est horizontale, comme AB, au pied de laquelle il y ait une tour AC, en sorte que l'angle CAB soit droit, on pourra aisément mesurer cette ligne AB du sommet C de la tour AC, en mesurant avec un Demi-cercle la quantité de l'angle visuel ACB, que nous supposerons de 60. degrez, & avec un perpen-

dicule la hauteur AC de la tour, que nous ſuppoſerons de 125. pieds, afin que dans le triangle rectangle ABC, on puiſſe connoiſtre le côté ou la longueur AB qu'on cherche, par cette analogie.

Comme le Sinus Total 100000
A la Tangente de l'angle viſuel C 173205
Ainſi la hauteur de l'œil AC 125
A la ligne AB 216

Si la hauteur AC n'eſt pas preciſément à l'extremité de la ligne ho-



rizontale à meſurer DB, on meſu-

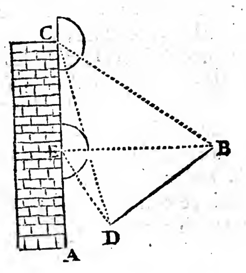
tera comme auparavant la quantité des angles visuels ACB, ACD, pour trouver par une methode semblable à la precedente, la longueur des lignes AB, AD, dans les deux triangles rectangles ABC, ADC, aprés quoy on ôtera la plus petite AD de la plus grande AB, pour avoir au reste la longueur de la ligne DB, qu'on cherche.

Mais cette methode se peut abreger, en changeant les deux analogies, qu'il faudroit faire dans les deux triangles rectangles ABC, ADC, en une seule, telle qu'est la suivante.

Comme le Sinus Total,
A la difference des Tangentes des angles visuels ACD, ACB.
Ainsi la hauteur AC.
A la ligne DB qu'on cherche.

Secondement si la ligne à mesurer DB n'est pas horizontale, il faudra faire une seconde station en un lieu éloigné de la premiere C au-

tant qu'il sera possible, sur tout quand la ligne à mesurer DB sera



bien grande, comme en E, pour prendre de nouveau la quantité des angles visuels AEB, AED: & comme il seroit icy inutile de mesurer la hauteur AC, on mesurera en sa place la distance des stations EC. Aprés quoy on ôtera de l'angle AED l'angle ACD, pour avoir l'angle EDC, & dans le triangle ECD, connoissant outre les angles le côté CE, on pourra connoistre

noiſtre par la Trigonometrie, celuy qu'on voudra des deux côtez ED, CD. Pareillement on ôtera de l'angle AEB l'angle ACB, pour avoir l'angle EBC, & dans le triangle ECB, connoiſſant outre les angles le côté CE, on pourra trouver celuy qu'on voudra des deux côtez EB, CB. Enfin connoiſſant dans le triangle EDB, les deux côtez ED, EB, & l'angle compris DEB, qui eſt égal à la difference des deux connus AED, AEB, ou bien connoiſſant dans le triangle CDB, les deux côtez CB, CD, & l'angle compris DCB, qui eſt égal à la difference des deux connus ACD, ACB, on pourra connoiſtre le troiſiéme côté, ou la ligne DB qu'on cherche.

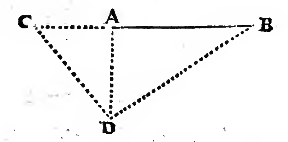
C'eſt de cette maniere qu'ō meſurera d'enhaut la lōgueur d'un champ ou d'un pré, avec la hauteur d'un château ou d'une maiſon en ligne droite, la longueur ou la largeur d'un toit, ou

le penchant d'une colline, ou de quelque autre chose semblable, dont les extremitez soient en ligne droite.

PROBLEME IV.

Mesurer de dessus terre une ligne horizontale inaccessible.

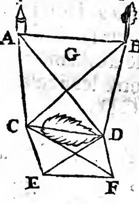
PRemierement si l'on peut faire une station, qui soit en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, comme en C, faites au point C



l'angle BCD, tel qu'il vous plaira par la ligne CD d'une grandeur volontaire, & ayant fait une seconde station au point D, mesurez avec

un Demi-cercle la quantité des angles visuels CDA, ADB, par le moyen desquels & du premier C, il ne sera pas difficile de connoistre tous les autres angles. Ainsi dans le triangle ADC, connoissant les angles & le côté CD, on pourra connoistre le côté AD: & dans le triangle ADB, connoissant les angles & le côté AD, on pourra connoistre le côté ou la ligne AB qu'on cherche.

Secondement si vous ne pouvez pas faire vôtre premiere station, en un point, qui soit en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, faites-la où vous pourrez, comme en C, & mesurez avec un Demi-cercle



l'angle visuel ACB. Faites une seconde station en quelque lieu

commode, qui puiſſe être vû de la premiere C, comme en D, & meſurez avec un Demi-cercle les angles ACD, BCD, ADB, ADC, BDC, & avec un cordeau la ligne CD. Dans le triangle BCD, connoiſſant les deux angles C, D, leur ſomme étant ôtée de 180 degrez, donnera le troiſiéme angle B, & parce qu'outre les angles on connoiſt le côté CD, on pourra trouver par la Trigonometrie, celuy qu'on voudra des deux autres BC, BD. Pareillement dans le triangle ACD, connoiſſant les deux angles C, D, leur ſomme étant ôtée de 180 degrez, donnera le troiſiéme angle A, & parce qu'outre les angles on connoiſt le côté CD, on pourra trouver celuy qu'on voudra des deux côtez AC, AD. Enfin dans le triangle ABC, connoiſſant les deux côtez AC, BC, & l'angle compris ACB; ou bien dans le triangle ADB, connoiſſant les cô-

tez A D, B D, & l'angle compris A D B, on pourra trouver le troiſiéme côté, ou la ligne A B, qu'on cherche.

Comme la ligne CD doit être d'une longueur conſiderable, ſi la ligne à meſurer A B eſt extrémement longue, & qu'il peut arriver que la diſtance des deux points C,D, ne puiſſe pas être meſurée actuellement avec un cordeau, ou avec une chaîne, on la meſurera par la Trigonometrie, par une ſeule ſtation que l'on pourra faire en E, ou en F, comme il a eſté enſeigné au *Probl.* 2. ou bien on la pourra meſurer ſans Trigonometrie, par *Probl.* 1.

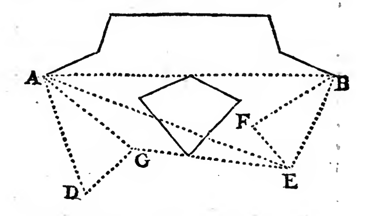
La maniere dont je me ſers ordinairement pour meſurer une ſemblable ligne inacceſſible, eſt telle. Faites une ſtation en quelque lieu commode, comme en G, & meſurez avec le Demi-cercle l'angle viſuel A G B. Prolongez la ligne A G en D, & la ligne B G en C,

en ſorte que les lignes CG, DG, ſoient chacune d'une grandeur connuë, & telle que l'on voudra. Meſurez encore avec un Demi-cercle les angles viſuels ACB, ADB, pour avoir dans chacun des triangles AGC, BGD, trois choſes connuës, ſçavoir deux angles & un côté, ce qui ſuffit pour pouvoir connoiſtre par la Trigonometrie les côtez AG, BG; & dans le triangle AGB, connoiſſant les deux côtez AG, BG, & l'angle G qu'ils comprennent, on pourra trouver le troiſiéme côté, ou la longueur AB, qu'on cherche.

Si le terrain ne vous permet pas de prolonger les lignes AG, BG, faites avec le Demi-cercle les angles AGC, BGD, d'une quantité connuë, par les lignes GC, GD, d'une grandeur auſſi connuë, & achevez le reſte comme nous venons de dire.

Tout ce que nous avons dit ſup-

poſe que d'un même point de ſtation on puiſſe voir les deux extremitez A, B, de la ligne à meſurer AB: mais s'il y a quelque empêchement, comme ſi du point G on ne pouvoit voir que la pointe du Baſtion A, à



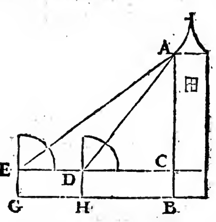
cauſe d'un Ravelin, qui eſtant devant la courtine ôteroit la vûë de la pointe de l'autre Baſtion B; on fera avec le Demi-cercle l'angle AGD d'une grandeur connuë, par la ligne GD d'une grandeur auſſi connuë, & on meſurera l'angle D avec un Demi-cercle, afin que dans le triangle ADG, on puiſſe con-

noiſtre par ſupputation la ligne AG. Aprés cela choiſiſſez un autre point commode, comme E, duquel on puiſſe voir les points B, G, afin qu'on puiſſe meſurer avec un Demi-cercle les angles AGE, GEB, & avec un cordeau la ligne GE. Ainſi dans le triangle AGE, connoiſſant les côtez GA, GE, & l'angle G compris, on pourra connoiſtre par ſupputation le côté AE, & l'angle GEA, lequel eſtant ôté de l'angle connu GEB, il reſtera l'angle AEB. Faites enfin au point E l'angle BEG d'une grandeur connuë, par la ligne EF d'une quantité auſſi connuë, & meſurez l'angle F, afin que dans le triangle EBF, connoiſſant deux angles & un côté, on puiſſe connoiſtre le côté EB; & dans le triangle AEB, connoiſſant les deux côtez EA, EB, & l'angle compris E, on pourra connoiſtre le troiſiéme côté, ou la ligne AB qu'on cherche.

PROBLEME V.

Mesurer une hauteur accessible.

NOus supposerons icy que la hauteur AB est accessible, & qu'elle est perpendiculaire sur le



Plan du terrain BH. Prenez à volonté sur ce Plan BH, le point H, où vous éleverez à plomb le bâton D H haut de trois ou quatre pieds, avec un Demi-cercle, dont le centre réponde au point D, & dont le diametre soit parallele à

l'Horizon, en sorte qu'il réponde à la ligne horizontale DC, afin qu'on puisse prendre la quantité de l'angle visuel ACD, sous lequel le sommet A est vû : & parce que la hauteur AB est accessible, on pourra mesurer avec un cordeau ou autrement la ligne HB, ou DC son égale, que nous supposerons de 144 pieds : quant à l'angle visuel ADC, nous le supposerons de 60 degrez, & alors on pourra trouver dans le triangle rectangle ADC, le côté AC, par cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
A la Tangente de l'angle visuel E 173205
Ainsi le côté DC 144
Au côté AC. 249

auquel ajoûtant 3 pieds pour la ligne CB, ou DH, si elle est d'autant, on aura la hauteur proposée AB de 252 pieds.

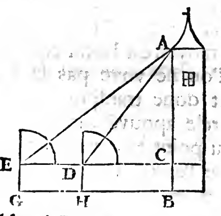
Pour connoistre si vous n'avez point manqué, faites une seconde

ſtation en quelque autre lieu du même Plan horizontal HB, comme en G, où vous ferez ce que vous venez de faire en H, & vous chercherez la ligne AC dans le triangle rectangle AEC laquelle ſi vous avez bien fait, ſe doit trouver la même qu'auparavant.

PROBLEME VI.

Meſurer d'embas une hauteur inacceſſible.

NOus ſuppoſerons comme auparavant, que la hauteur in-



acceſſible AB eſt perpendiculaire

ſur le Plan du terrain, & qu'on ne peut pas voir la baſe B, autrement on pourroit meſurer la ligne HB acceſſible d'un côté, par *Probl.* 2. & par le Probleme precedent on pourroit meſurer la hauteur AB, comme ſi elle étoit acceſſible.

Dans ce cas, il faudra faire deux ſtations, dont la premiere ſoit par exemple en H, où l'on prendra la quantité de l'angle viſuel ADC, comme il a eſté enſeigné au Probleme precedent; & la ſeconde ſoit en quelque autre lieu commode, comme en G, en ſorte que les trois points G, H, B, faſſent une ligne droite, ce que l'on fera aiſément par le moyen du Demi-cercle, bien que l'on ne voye pas la baſe B. Ayant donc tranſporté vôtre Demi-cercle appuyé ſur le même bâton au point H, meſurez la quantité de l'angle viſuel AEC, que nous ſuppoſerons de 40 degrez: quant au premier ADC, nous le

ſuppoſerons de 60 degrez. Meſurez encore avec un cordeau la diſtance des ſtations GH, ou DE ſon égale, que nous ſuppoſerons de 48 pieds. Cela étant ſuppoſé, ôtez de l'angle ADC l'angle AEC, pour avoir au reſte l'angle EAD, qui ſe trouvera de 20 degrez, & dans le triangle EDA, connoiſſant outre les angles, le côté ED, on pourra trouver celuy qu'on voudra des deux autres côtez AD, AE; aprés quoy dans lequel on voudra des deux triangles rectangles ACD, ACE, où l'on connoiſt outre les angles, l'hypotenuſe, on pourra trouver le côté AC, auquel ajoûtant la hauteur de l'œil BC, on aura la hauteur AB qu'on cherche.

Mais ce côté AC ſe peut trouver bien plus facilement. Car puiſque nous avons ſuppoſé l'angle ADC de 60 degrez, ſon complement CAD ſera de 30 degrez, dont

la Tangente eſt 57735 pour la ligne CD à l'égard du Sinus Total AC 100000 : & parce que nous avons ſuppoſé l'angle AEC de 40 degrez, ſon complement EAC ſera de 50 degrez, dont la Tangente eſt 119175 pour la ligne CE, à l'égard du même Sinus Total AC 100000. C'eſt pourquoy ſi on ôte la plus petite de ces deux Tangentes de la plus grande, on aura 61440 pour leur difference DE, à l'égard du Sinus Total AC 100000. Ainſi nous ſçavons que ſi la ligne DE étoit de 61440 pieds, le côté AC feroit de 100000 pieds, & pour ſçavoir de combien de pieds ce même côté AC ſera, lorſque la ligne DE ne ſera que de 48. pieds, telle que nous l'avons icy ſuppoſée, on doit faire cette analogie.

Comme la difference des Tangentes 61440
Au Sinus Total 100000
Ainſi la ligne DE 48

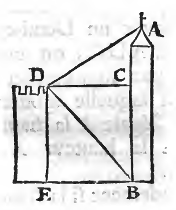
Au coſté AC 78

auquel ajoûtant 3 pieds pour la hauteur de l'œil BC, on connoiſtra que la hauteur propoſée AB eſt de 81 pieds.

PROBLEME VII.

Meſurer d'en haut une hauteur inacceſſible.

SUppoſons que du ſommet D de la tour DE, il faille meſurer la tour AB, & que ſa baſe B

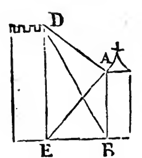


puiſſe être vûë du point D, & de plus que les deux baſes E, B, ſoient au niveau, en ſorte que chacun des

deux angles E, B, soit droit, autrement il faudra mesurer la hauteur A B, comme il a esté enseigné au *Probl.* 3.

Premierement si la hauteur à mesurer AB est plus grande que la hauteur DE, on mesurera avec un perpendicule la hauteur DE, & avec un Demi-cercle l'angle visuel EDB, afin que dans le triangle rectangle DEB, on puisse trouver par la Trigonometrie, la distance EB, égale à sa parallele CD: & si dans le triangle rectangle ACD, on mesure avec un Demi-cercle l'angle visuel ADC, on pourra connoistre par supputation la ligne AC, à laquelle ajoûtant la ligne BC égale à la hauteur DE, on aura la hauteur AB qu'on cherche.

Secondement si la hauteur à mesurer AB est plus petite que la hauteur DE, au lieu de mesurer la distance EB, on mesurera le rayon



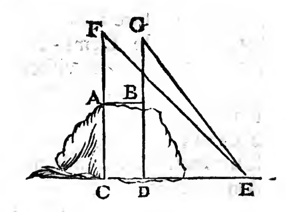
visuel DB, dans le même triangle rectangle DEB: & si on mesure encore avec le Demi-cercle l'angle visuel BDA, on pourra trouver par supputation dans le triangle ADB, dont l'angle ABD est égal au connu BDE, la hauteur AB qu'on cherche.

PROBLEME VIII.

Mesurer la hauteur d'une montagne, sur laquelle on est situé.

Nous supposons que sur la montagne, dont on cherche la hauteur, il y ait une plaine AB, assez étenduë pour y pouvoir faire deux stations A, B, desquelles on puisse voir un même point pris à discretion sur la campagne, com-

me E, qu'il faut aussi suppoſer de même hauteur que la baſe de la montagne, & par conſequent au



niveau avec les deux points C, D, qui répondent à plomb aux deux points de ſtation A, B, où l'on prendra avec un Demi-cercle la quantité des angles viſuels CFE, DGE, en ſuppoſant que les deux bâtons AF, BG, qui doivent être élevez à plomb, & ſur leſquels le Demi-cercle eſt appuyé, ſont égaux, ce qui rendra les deux lignes CF, DG, égales & paralleles, & conſequemment la ligne CD égale à la ligne

AB, qui eſt connuë, puiſqu'on la peut meſurer avec un cordeau. Cela étant fait, puiſque l'on connoiſt l'angle CFE, on connoiſtra dans les Tables ſa Tangente CE à l'égard du Sinus Total CF; & pareillement puiſque l'on connoiſt l'angle DCE, on connoiſtra ſa Tangente DE à l'égard du Sinus Total GD égal au premier FC, & ſi on ôte la Tangente DE de la Tangente CE, la difference des Tangentes donnera CD ou AB, à l'égard d'un Sinus Total FC ou GD de 100000 parties: & comme la ligne AB eſt déja connuë, pour trouver à l'égard de ſa valeur le Rayon FC, on fera cette analogie.

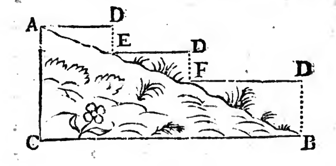
Comme la difference des Tangentes,
Au Sinus Total;
Ainſi la ligne AB,
A la ligne FC,

de laquelle ôtant la hauteur de l'œil AF, il reſtera la hauteur AC de la montagne.

PROBLEME IX.

Mesurer la hauteur & la largeur d'une montagne.

NOus supposons que la montagne ABC ne soit pas extrémement haute & qu'on la puisse aisément parcourir depuis le haut jusques au bas, c'est à dire depuis



A, jusques en B, & alors on pourra mesurer mecaniquement sa hauteur AC, & sa largeur AB, en cette sorte.

Pour donc mesurer la hauteur AC, & la largeur BC, de la montagne ABC, mettez à son sommet

A la regle AD parallele à l'horizon d'une longueur volontaire, & la plus grande qu'il ſera poſſible, & il ſera facile de donner à cette regle une ſituation horizontale par le moyen d'un niveau. Faites pendre de ſon extremité D le perpendicule DE, & au point E, où il touche la montagne, appliquez de nouveau la regle ED, égale ſi vous voulez à la precedente, en ſorte que ſa ſituation ſoit toûjours horizontale, & faites, comme auparavant, pendre de ſon extremité D, le perpendicule DF, pour appliquer de la même façon une troiſiéme regle FD, au point F, où il touche la montagne, & continuez ainſi, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu au bas de la montagne B. Cela étant fait, il eſt évident, que la ſomme de tous les perpendicules DE, DF, DB, donnera la hauteur AC de la montagne, & que la ſomme de toutes les regles AD, ED, FD, donnera la largeur BC.

La largeur BC, & la hauteur AC, se peuvent aussi connoistre par la Trigonometrie, en mesurant la longueur AB de la montagne avec un cordeau, & avec un Demi-cercle l'angle DAB, qui est égal à l'angle ABC, à cause des deux paralleles AD, BC; car ainsi connoissant dans le triangle rectangle ABC, les angles & l'hypotenuse AB, on pourra connoistre par supputation les côtez AC, BC.

Icy on ne trouve la largeur BC, que depuis le point C, qui répond perpendiculairement au sommet A de la montagne, & si on la veut avoir entiere, on fera de l'autre côté de la montagne, ce qui a esté fait de celuy-cy.

Scolie.

Nous remarquerons icy en passant, qu'une piece de terre, inclinée & aussi longue que le penchant de la colline AB, ne produira pas plus qu'une plai-

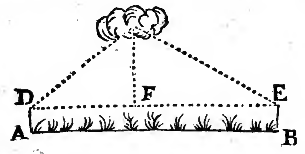
ne aussi longue que la base BC. Car il est bien évident que si la ligne BC est capable de contenir par exemple cent arbres, la ligne AB n'en pourra pas contenir davantage, bien qu'elle soit plus longue, à cause des arbres qui croissent naturellement perpendiculaires à l'Horizon, ce qui fait qu'ils sont bien perpendiculaires à la ligne Horizontale BC, mais non pas à l'inclinée AB. Ainsi celuy-là se tromperoit beaucoup, qui donneroit autant d'une piece de terre située dãs le penchant d'une colline, sur tout quand elle sera beaucoup inclinée, que d'une autre de même contenu située dans une plaine.

PROBLEME X.

Mesurer la hauteur d'une Nuée.

POur mesurer la hauteur d'une nuée, lorsqu'elle n'aura pas un mouvement trop rapide, il faut que deux observateurs soient situez dans

une longue plaine, & éloignez entre-eux autant qu'il sera possible, en



sorte que neanmoins la distance AB des stations ne soit pas si longue, que l'un des observateurs ne puisse entendre un coup de mousquet que l'autre doit tirer, pour faire connoistre au premier qu'il doit regarder en même temps que luy un même point remarquable de la nuée, dont ils doivent avoir convenu en se quittant, comme C, pour prendre chacun en même temps avec un Demi-cercle, la quantité des angles visuels CDE, CED; car ainsi on aura dans le triangle DCE, outre les angles, le côté DE connu, comme étant égal à la distance des sta-

ſtations A, B, laquelle ſe peut aiſément meſurer avec un cordeau, ou autrement. C'eſt pourquoy on pourra connoiſtre par la Trigonometrie celuy qu'on voudra des deux côtez CD, CE, & en ſuite la perpendiculaire CF, à laquelle ajoûtant la hauteur de l'œil, on aura la hauteur de la nuée qu'on cherche.

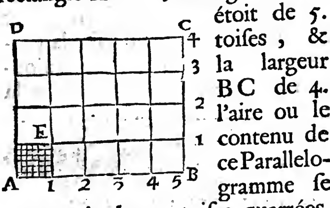


TROISIE'ME PARTIE DE LA PLANIMETRIE.

Comme dans la Longimetrie on meſure les lignes par d'autres lignes plus petites, de même dans la Planimetrie on doit meſurer les Plans par d'autres Plans plus petits, qui ſont toûjours quarrez, parce qu'ils ſont les plus commodes dans l'uſage, comme par des

pieds quarrez, de toises quarrées, &c.

Comme si du Parallelogramme rectangle ABCD, la longueur AB



étoit de 5. toises, & la largeur BC de 4. l'aire ou le contenu de ce Parallelogramme se trouveroit de 20. toises quarrées, qui sont formées par l'intersection de certaines lignes tirées en long & en travers par les divisions des côtez opposez du Parallelogramme proposé ABCD.

De même pour avoir le contenu ou la capacité du quarré AE, qui represente une toise quarrée, & dont chacun des côtez est par consequent de 6. pieds, nous tirerons par les divisions des côtez opposez des lignes droites, lesquelles par

leur mutuelle interſection formeront 36. pieds quarrez, pour l'aire du quarré propoſé, ou de la toiſe quarrée AE.

Neanmoins l'aire de ce quarré AE & du Parallelogramme rectangle ABCD, ſe peut trouver avec bien moins de peine, par la ſeule multiplication. Car ſi on multiplie enſemble les nombres des deux côtez qui font l'angle droit, c'eſt à dire la longueur par la largeur, on aura le nombre des meſures quarrées contenuës dans le Parallelogramme propoſé. Ainſi multipliant 5. par 4. on aura 20. toiſes quarrées pour le contenu du Parallelogramme rectangle ABCD, & multipliant 6. par 6. on aura 36. pieds quarrez, pour la valeur de la toiſe quarrée AE.

D'où il ſuit que quand on multiplie deux lignes enſemble, on a le contenu de leur rectangle, c'eſt à dire d'un Parallelogramme rectan-

gle, dont elles repreſentent la longueur & la largeur: & que quand on multiplie une ligne par elle même, on a la capacité de ſon quarré. Ainſi on connoiſtra qu'une toiſe courante ayant 6. pieds, une toiſe quarrée aura 36. pieds quarrez; & qu'un pied ayant 12. pouces, un pied quarré aura 144. pouces quarrez; & que pareillement une perche ayant 18. pieds, une perche quarrée aura 324. pieds quarrez; ainſi des autres.

C'eſt pourquoy quand on aura des toiſes quarrées à reduire en pieds quarrez, au lieu de multiplier ces toiſes par 6. il les faudra multiplier par 36: & quand on aura des pieds quarrez à reduire en pouces quarrez, au lieu de multiplier ces pieds par 12. on les multipliera par 144. Tout au contraire quand on aura des pieds quarrez à reduire en toiſes quarrées, au lieu de les diviſer par 6. on les diviſera par 36: & quand on aura des pouces quarrez

à reduire en pieds quarrez, au lieu de les diviser par 12, on les doit diviser par 144. &c.

CHAPITRE I.

THEOREMES.

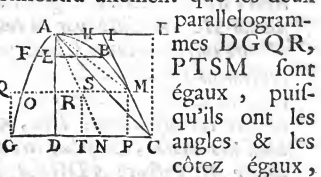
THEOREME I.

Si de la ligne courbe ABC, dont le diametre est AD, & la touchante au sommet est AE, parallele à l'ordonnée CD, on forme sur le diametre AD, la ligne courbe AFG, dont l'ordonnée DG soit égale à la partie AI terminée par la touchante correspondante CI, & pareillement l'ordonnée LF égale à la partie AH terminée par la touchante correspondante BH, & ainsi des autres, & qu'on tire la droite AC, l'espace ADGFA sera double du Segment ABCA.

POur la demonstration, tirez par le sommet A à la touchan-

te CI, la parallele AN, & prenez ſur la courbe ABC, le point M infiniment proche du point C, & alors la ligne CM étant infiniment petite pourra paſſer pour une ligne droite, & par conſequent pour une partie de la touchante CI. Tirez par le même point M au diametre AD, la parallele MP, & achevez le parallelogramme MPGQ. Enfin tirez la droite AM, & par le point S au diametre AD la parallele ST.

Cette preparation étant faite, on connoiſtra aiſément que les deux



parallelogrammes DGQR, PTSM ſont égaux, puiſqu'ils ont les angles & les côtez égaux, chacun au ſien. Et parce que le parallelogramme PTSM eſt égal au parallelogramme CNSM, par 35. 1. & que celuy-cy eſt double du

triangle ACM, par 41.1. il s'ensuit que le parallelogramme DGQR est aussi double du triangle ACM. Et comme le point Q tombe sur la courbe AFG en O, parce que le parallelogramme PGQM n'a point de largeur, puisque les deux points C, M, sont supposez infiniment proches, on peut prendre le trapeze DGOR pour le parallelogramme DGQR. Ainsi nous sçavons que le trapeze DGOR est double de son triangle correspondant ACM. D'où il est aisé de conclure, que tous les trapezes infinis, dont l'espace ADGFA est composé, sont doubles de tous les triangles infinis correspondans, qui composent le Segment ABCA, & que par consequent tout l'espace ADGFA est double de tout le Segment ABCA. Ce qu'il faloit demontrer.

Ce Theoreme est de grand usage, comme vous verrez dans la suite; & je n'ay pas encore appris que personne

l'ait demontré si generalement que nous.

THEOREME II.

Une Parabole est à un parallelogramme de même base & de même hauteur, comme 2. est à 3.

POur demontrer dans la même figure, que si la courbe ABC est la circonference d'une Parabole telle que nous l'avons definie ailleurs, l'espace Parabolique ADCBA est au Parallelogramme ADCE, qui a la même base DC & la même hauteur, comme 2. est à 3, que l'on en forme par le Theoreme precedent, sur le diametre AD, la courbe AFG, (qui sera la circonference d'une autre Parabole, dont le Parametre sera le quart de celuy de la proposée) comme il a esté enseigné au Theoreme precedent, où nous avons demontré que l'es-

pace ADGFA eſt double du Segment Parabolique ACBA, & alors on connoiſtra aiſément que le petit eſpace Parabolique ADGFA n'eſt que la moitié du grand ADCBA, parce que les ordonnées GD, LF, &c. ne ſont que les moitiez des ordonnées correſpondantes CD, BL, &c. ou des lignes AI, AH, &c. par la proprieté de la touchante de cette Parabole, qui eſt plane, & que par conſequent le même grand eſpace Parabolique ADCBA eſt quadruple du Segment ACBA, & le triangle ADC triple du même Segment, & conſequemment le parallelogramme ADCE ſextuple du même Segment ACBA: & comme nous avons reconnu que la Parabole ADCBA, eſt quadruple de ce Segment, il s'enſuit que la Parabole ADCBA eſt au parallelogramme ADCE comme 4. à 6, ou comme 2. à 3. Ce qu'il faloit demontrer.

SCOLIE.

Puisque le triangle ADC, *ou* AEC *son égal est triple du Segment* ACBA, *il s'ensuit que le complement Parabolique* ABCE *est double du même Segment, & parce que le parallelogramme* ADCE *est sextuple de ce Segment, le complement Parabolique* ABCE *sera au parallelogramme* ADCE, *comme* 2. *à* 6, *ou comme* 1. *à* 3.

Si la Parabole ADC *étoit solide, en sorte que les cubes des ordonnées* CD, BL, *&c. fussent proportionnels aux parties correspondantes du diametre* AD, AL, *on trouveroit par un raisonnement semblable au precedent, que le Segment Parabolique* ABCE, *seroit au parallelogramme* ADCE, *comme* 1. *à* 4, *parce que la proprieté de la touchante de cette nouvelle Parabole est que* AI, *ou* DG *son égale est à l'ordonnée correspondante* CD, *cõme* 2. *à* 3, *& que pareillement* AH *ou* LF *son égale est à l'ordonnée correspon-*

dante LB, *comme* 2. *à* 3, *& ainsi de toutes les autres. D'où l'on conclud sans peine que le petit espace Parabolique* ADGFA *est au plus grand* AD CBA, *aussi comme* 2. *à* 3: *& comme il est au Segment Parabolique* ACBA, *comme* 2. *à* 1, *par le Theoreme precedent, il s'ensuit que l'espace Parabolique* ADCBA *est au Segment Parabolique* ACBA, *comme* 3. *à* 1, *&c.*

On trouvera aussi par un raisonnement semblable au precedent, que si la Parabole ADC *est d'un degré plus élevé, en sorte que les quarré-quarrez des ordonnées* CD, BL, *&c. soient proportionnelles aux parties correspõdantes du diametre* AD, AL, *&c. le complement Parabolique* ABCE *est au parallelogramme* ADCE, *comme* 1. *à* 5, *parce que la proprieté de la touchante de cette Parabole Planoplane est que* AI *ou* DG *son égale est à l'ordonnée correspondante* CD *cõme* 3. *à* 4, *& que pareillement* AH *ou* LF *son égale est à l'ordonnée correspondante*

BL, comme 3. à 4. D'où il est aisé de conclurre que le petit espace Parabolique ADGFA est au plus grand ADCBA, aussi comme 3. à 4, &c.

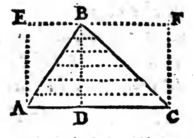
Ainsi on peut demontrer que dans une suite infinie de Paraboles de differens degrez, le Segment Parabolique ABCE est au parallelogramme ADCE, comme 1. à 2, à 3, à 4, à 5, à 6, & ainsi en suite selon l'ordre des nombres naturels; ce que l'on doit bien remarquer, parce que dans la suite nous en tirerons de belles consequences. Cela depend de la proprieté des touchantes de toutes ces Paraboles, qui est que AI est à l'ordonnée correspondante CD, comme 1. à 2, comme 2. à 3, comme 3. à 4, comme 4. à 5, & ainsi en suite. Cette proprieté sera facile à demontrer à celuy qui entendra un peu l'Algebre; & pour ne pas m'éloigner de la brieveté que je me suis proposée dans ce Traité de Geometrie Pratique, je n'en parleray pas davantage.

THEOREME III.

La somme des quantitez infinies en continuelle proportion arithmetique en commençant depuis o, est égale à la moitié de la plus grande multipliée par le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez.

PUisque l'on suppose que toutes ces quantitez sont dans une continuelle proportion arithmetique, on peut considerer la plus grande comme la base AC du triangle ABC, & la plus petite, ou o, comme le sommet B, & toutes les autres comme des lignes droites tirées parallelement à la base AC au dedans du triangle ABC, en sorte qu'elles divisent la perpendiculaire BD en une infinité de parties égales, afin que ces parties égales étant selon l'ordre des nombres naturels o, 1, 2, 3, &c. en les comtant depuis B,

& conſequemment dans une continuelle proportion arithmetique, ces



lignes conſervent une même proportion, à cauſe de la ſimilitude des triangles infinis, dont le triangle ABC eſt compoſé : & qu'ainſi la perpendiculaire BD repreſente le nombre de ces mêmes quantitez. Et parce que multipliant la baſe AC par la perpendiculaire BD, on a le contenu du parallelogramme rectangle AEFC, qui a même baſe & même hauteur que le triangle ABC, & qui eſt double de ce même triangle, par 41.1. il s'enſuit que la moitié de la plus grande quantité AC multipliée par la perpendiculaire BD, ou par le nombre des quantitez infinies

arithmetiquement proportionnelles, est égale au triangle ABC, c'est à dire à la somme de ces mêmes quantitez. Ce qu'il faloit demontrer.

Ce Theoreme est aussi vray, quand le nombre des quantitez en continuelle proportion arithmetique n'est pas infiny, si au lieu de la plus grande on prend la somme de la plus grande & de la plus petite : mais comme cela ne contribuë rien à nôtre dessein, nous n'en parlerons pas davantage.

THEOREME IV.

La somme des quarrez infinis des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençant depuis o, est égal au tiers du plus grãd quarré multiplié par le nombre qui exprime la multitude de ces quarrez.

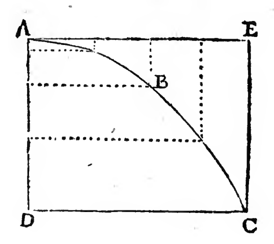
PUisque l'on suppose que les côtez de tous ces quarrez sont dans une continuelle proportion

arithmetique, on peut considerer tous ces quarrez dans une Pyramide, dont la base soit le plus grand quarré, & le sommet le plus petit quarré ou o, en sorte que tous ces quarrez qui composent la Pyramide, divisent sa hauteur en une infinité de parties égales, afin que ces parties égales estant dans une continuelle proportion arithmetique, en les comtant depuis la pointe de la Pyramide, les côtez de ces quarrez soient dans cette même proportion, & qu'ainsi la hauteur de la Pyramide represente le nombre de ces quarrez. Et parce qu'en multipliant la base de la Pyramide par sa hauteur, on a le contenu d'un Prisme, lequel par 7. 12. est triple de la Pyramide, il s'ensuit que le tiers du plus grand quarré multiplié par la hauteur de la Pyramide, ou par le nombre des quarrez, est égal à la Pyramide, c'est à dire à la somme de ces mêmes quarrez. Ce qu'il

faloit demontrer.

Comme cette demonſtration eſt particuliere, & qu'elle depend des principes de la Stereometrie, dont nous n'avons pas encore parlé, nous en donnerons une autre plus generale, de laquelle nous tirerons pluſieurs belles conſequences.

Soit ſur l'axe AD la Parabole plane ABCD, dont CD ſoit perpendiculaire à l'axe AD, & par conſequent une ordonnée, & ſoit achevé le rectangle ADCE. Diviſez le



côté AE en une infinité de parties

égales, & menez par les points de division des lignes paralleles entre elles & à l'axe AD, lesquelles seront terminées à la circonference ABC de la Parabole, & composeront le complement Parabolique ABCE, de sorte que la ligne AE representera le nombre de toutes ces paralleles, dont les quarrez sont dans la raison des quarrez des nombres naturels, 0,1,2,3,&c. & consequemment des quantitez en continuelle proportion arithmetique, par la nature de cette Parabole. C'est pourquoy on peut considerer le complement Parabolique ABCE comme la somme des quarrez infinis de quantitez infinies en continuelle proportion arithmetique, dont le plus grand est EC, & le plus petit ou o est le point A. Et comme en multipliant ce plus grand EC par la ligne AE, qui exprime le nombre de tous ces quarrez, on a l'aire du rectangle ADCE, lequel

eſt triple du complement Parabolique ABCE, par *Theor.* 2. il s'enſuit que le tiers du plus grand quarré EC multiplié par le nombre AE de tous les quarrez, eſt égal au complement Parabolique ABCE, c'eſt à dire à la ſomme de ces mêmes quarrez. Ce qu'il faloit demontrer.

Scolie.

On demontrera de la même façon que *la ſomme des cubes infinis des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençãt depuis* 0, *eſt égale au quart du plus grãd cube multiplié par le nombre qui exprime la multitude de ces cubes*, en ſuppoſant que ABCD ſoit une Parabole cubique, où il arrive que le rectangle ADCE eſt quadruple du complement Parabolique ABCE, par *Theor.* 2. Car toutes les paralleles de ce complement ſeront comme les cubes des nombres naturels,

par la proprieté de la Parabole, &c.

C'eſt auſſi de la même façon que l'on demontrera, que *la ſomme des quarré-quarrez infinis des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençant depuis* o, *eſt la cinquiéme partie du plus grand quarré-quarré multiplié par le nombre qui exprime la multitude de ces quarré-quarrez*, en ſuppoſant que ABCD ſoit uneParabole d'un degré plus élevé, & ainſi en ſuite des autres Puiſſances.

Ainſi vous voyez par ce Theoreme & par le precedent, que *les ſommes de quantitez, qui ſont dans une continuelle proportion arithmetique, de leurs quarrez, de leurs cubes, & de leurs autres Puiſſances par ordre, ſont à la plus grande multipliée par le nombre de leur multitude, comme* 1. *à* 2, *à* 3, *à* 4, *à* 5, *& ainſi enſuite ſelon l'ordre des nombres naturels.*

THEOREME V.

Un polygone regulier eſt la moitié du rectangle ſous ſa circonference & la perpendiculaire, qui tombe du centre ſur le milieu de l'un des côtez.

JE dis que l'aire du polygone regulier BCDEFG eſt la moitié du rectangle ſous la circonference DO & la perpendiculaire AH, qui tombe du centre A ſur le milieu H du côté CD. Car puiſque DO eſt la circonference du polygone, ou la ſomme de tous ſes côtez, ſi on la diviſe aux points C,I,K,L,M, en autant de parties égales que le polygone regulier aura de côtez, chaque partie ſera égale au côté du polygone: & ſi on tire au centre A par les points de diviſion des lignes droites, il ſe formera des triangles égaux entre eux & à ceux qui ſe font au dedans du polygone par les

rayons tirez de son centre à chacun de ses angles, parce que tous ces triangles ont des hauteurs & des bases égales. C'est pourquoy la somme de tous les triangles, dont les bases sont sur la circonference DO, c'est à dire tout le triangle DAO, sera égal à la somme d'autant de triangles égaux qui composent le polygone,

c'est à dire à tout le polygone; & comme ce triangle est la moitié du rectangle DOAH, par 41. 1. le polygone sera aussi la moitié du même rectangle. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME VI.

Un cercle est la moitié d'un rectangle sous sa circonference & son rayon.

CE Theoreme est une consequence du precedent, car ce qui a esté demontré d'un polygone regulier, se doit entendre d'un cercle, qui est un polygone regulier d'une infinité de côtez, où la perpendiculaire qui tombe du centre sur l'un des côtez, devient le rayon du cercle.

Si vous voulez une autre demonstration, divisez le rayon du cercle en une infinité de parties égales, & décrivez du centre du même cercle par les points de division autant de circonferences de cercle, qui seront toutes en proportion arithmetique, parce que leurs rayons sont dans cette même proportion ; &

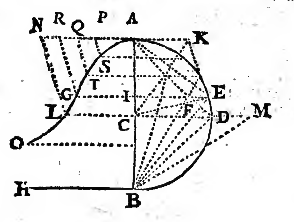
parce que le rectangle ſous la plus grande de toutes ces circonferences, qui eſt la circonference du cercle, & le rayon, qui eſt le nombre de leur multitude, eſt double de leur ſomme, c'eſt à dire de tout le cercle, par *Theor.* 3. il s'enſuit que le cercle eſt la moitié du rectangle ſous ſa circonference & ſon rayon. Ce qu'il faloit demontrer. On demontrera de la même façon qu'un ſecteur de cercle eſt la moitié du rectangle ſous ſon arc & ſon rayon.

THEOREME VII.

Le diametre d'un cercle eſt à ſa circonference, environ comme 7. *à* 22, *ou comme* 100. *à* 314.

POur demontrer cette verité, tirez du centre C du Demi-cercle ADB, ſur le diametre AB la perpendiculaire indefinie CD, & tirez de

de l'extremité B du même diametre AB, une ligne quelconque BE, qui coupe la perpendiculaire CD prolongée quand il en sera de besoin, en F, & la circonference du



Demi-cercle en E, par où vous tirerez à la ligne CD, la parallele indeterminée EG, qui se trouvera terminée en G, en faisant IG égale à sa partie correspondante CF. Comme il est libre de tirer la ligne BE comme l'on voudra, autant de points E differens que l'on choisira, autant de points G differens on trouvera, que l'on joindra par une ligne

courbe, qui passera par le point A, telle qu'est icy AGO, qui a un point d'inflexion vis-à-vis le milieu de AC, & une asymptote BH, qui est perpendiculaire au diametre AB. Nous appellerons cette ligne courbe AGO, *Quadratrice Geometrique*, parce qu'elle contribuë entierement à la quadrature du cercle, puisqu'avec le diametre AB & l'asymptote BH, elle comprend un espace indefiny ABHO, qui est precisément égal au cercle, dont le diametre est AB, comme nous allons demontrer.

Tirez par le point A au diametre AB, la perpendiculaire AK, qui sera une touchante, par 16. 3. & par le point E au rayon CE, la perpendiculaire EK, qui sera aussi une touchante, & égale par consequent à la premiere AK. Tirez encore les droites BE, CK, qui seront perpendiculaires à la corde AE, parce que l'angle AEB est dans un Demi-

cercle, & par consequent droit par 31. 3. & que le triangle KAC est égal au triangle KEC. Ainsi ces deux mêmes lignes BE, CK, seront paralleles entre elles, par 28. 1. & l'angle ACK égal à l'angle CBE, par 29. 1. ce qui rend égaux les deux triangles rectangles ACK, CBF, par 26. 1. à cause des deux lignes égales CA, CB, &c. C'est pourquoy la ligne AK sera égale à la ligne CF, ou à sa correspondante IG, qui luy est égale par la construction, & par *Theor.* 1. l'espace AGI sera double du Segment AE. D'où il est aisé de conclurre que tout l'espace indefiny ABHO est double du Demi-cercle ADB, c'est à dire égal au cercle, dont le diametre est AB. Ce qu'il faloit demontrer.

Cela étant supposé, cherchons premierement l'espace ACLGA, terminé par les deux lignes égales AC, CL, & par la courbe AGL.

Pour le trouver, achevons le quarré ACLN; & cherchons auparavant le complement AGLN, en trouvant une équation, qui exprime la relation de tous les points de la courbe AGL sur la ligne AC, ce qui se fera ainsi.

Si on nomme x la ligne GI, ou CF son égale, & y la ligne AI, & a le rayon AC, la ligne BI vaudra $2a-y$, & le quarré de la ligne IE vaudra $2ay-yy$: & parce que les quatre lignes BI, IE, BC, CF, sont proportionelles, par 4. 6. à cause des triangles semblables BIE, BCF, leurs quarrez seront aussi proportionnels, par 22. 6. & l'on aura cette analogie, $4aa-4ay-yy$, $2ay-yy :: aa, xx$, ou $2a-y, y :: aa, xx$, & par consequent cette équation $2axx-xxy \backsim aay$: dans laquelle on trouvera y, ou AI $\backsim \frac{2axx}{aa+xx}$, ou AI $\backsim \frac{2xx-2x^4}{a \; a^3} + \frac{2x^6-2x^8}{a^5 \; a^7}$ &c. C'est pourquoy si on divise la ligne AN en une infinité de parties égales aux

points P, Q, R, &c. D'où l'on tire à l'axe AB les paralleles PS, QT, RG, &c. & que la premiere partie AP soit appellée x, on aura AQ ∽ $2x$, AR ∽ $3x$, &c. de toutes les lignes infinies, dont le complement AGLN est composé, on trouvera.

$$PS \backsim \frac{2xx}{a} - \frac{2x^4}{a^3} + \frac{2x^6}{a^5} - \frac{2x^8}{a^7}, \ \&c.$$

$$QT \backsim \frac{8xx}{a} - \frac{32x^4}{a^3} + \frac{128x^6}{a^5} \ \frac{512x^8}{a^7}, \ \&c.$$

$$RG \backsim \frac{18xx}{a} - \frac{162x^4}{a^3} + \frac{1458x^6}{a^5} - \frac{13122x^8}{a^7},$$

&c. & ainsi des autres jusques à la derniere & plus grande NL ∽ a. Or on peut trouver la somme de toutes ces ordonnées infinies, par *Theor.* 4. & par consequent le complement AGLN, parce que tous les termes semblables dans les numerateurs des valeurs trouvées de toutes ces lignes sont des doubles Puissances, dont les côtez sont dans la proportion des nombres naturels, & consequemment dans une continuelle proportion arithmetique. Ainsi on trouvera que la somme des nume-

rateurs de tous les premiers termes $2xx$, $8xx$, $18xx$, &c. vaut $\frac{2}{3}a\,5$: que celle des numerateurs des seconds termes $2x4$, $32x4$, $162x4$, &c. vaut $\frac{2}{5}a\,5$: que celles des numerateurs des troisiémes termes $2x6$, $128x6$, $1458x6$, &c. vaut $\frac{2}{7}a7$, & ainsi ensuite. C'est pourquoy la somme de toutes ces lignes infinies, ou le complement AGLN sera $\frac{2}{3}aa\ \frac{2}{5}aa$ † $\frac{2}{7}aa\ \frac{2}{9}aa$, &c. lequel étant ôté du quarré ACLN ∽ aa, il restera $aa\ \frac{2}{3}aa$ † $\frac{2}{5}aa\ \frac{2}{7}aa$ † $\frac{2}{9}aa$, &c. pour l'espace AGLCA, dont la moitié $\frac{1}{2}aa\ \frac{1}{3}aa$ † $\frac{1}{5}aa\ \frac{1}{7}aa$ † $\frac{1}{9}aa$, &c. sera le Segment AD, auquel ajoûtant le triangle Isoscele rectangle ADC ∽ $\frac{1}{2}aa$, on aura $aa\ \frac{1}{3}aa$ † $\frac{1}{5}aa\ \frac{1}{7}aa$ † $\frac{1}{9}aa$, &c. pour le quart de cercle ACDEA, dont le quadruple $4aa\ \frac{4}{3}aa$ † $\frac{4}{5}aa\ \frac{4}{7}aa$ † $\frac{4}{9}aa$, sera l'aire du cercle entier, laquelle étant égale à la moitié du rectangle sous sa circonference & le rayon, par *Theor*. 6. si on la divise par la moitié

du rayon, c'eſt à dire par $\frac{1}{2}a$, on aura $8a \frac{8}{3} a \dagger \frac{8}{5} a \frac{8}{7} a \dagger \frac{8}{9} a$, &c. pour la circonference du cercle, dont le diametre eſt $2a$. D'où il eſt aiſé de conclurre, que le diametre d'un cercle eſt à ſa circonference, comme 1 à $4 \frac{4}{3} \dagger \frac{4}{5} \frac{4}{7} \dagger \frac{4}{9}$; &c. ou comme 1 à $\frac{8}{3} \dagger \frac{8}{35} \dagger \frac{8}{99} \dagger \frac{8}{195} \frac{8}{323} \dagger \frac{8}{483} \dagger \frac{8}{675}$ &c. Cette progreſſion eſt aiſée à continuer, parce que les differences des differences des denominateurs ſont égales, ſçavoir 32. C'eſt pourquoy tant plus on les continuera, d'autant plus prés on approchera de la raiſon du diametre d'un cercle à ſa circonference & ſi au lieu de donner 1 au diametre, on luy donne 7, ſa circonference ſera $\frac{56}{3} \dagger \frac{56}{35} \dagger \frac{56}{99} \dagger \frac{56}{195} \dagger \frac{56}{323} \dagger \frac{56}{483} \dagger \frac{56}{675}$ &c. & ſi on reduit en entiers toutes ces fractions, on trouvera que le diametre étant 7, la circonference ſera preſque 22, & qu'ainſi le diametre d'un cercle eſt à ſa circonference, environ comme 7 à 22, ce qui eſt une des choſes qu'il faloit demon-

I 4

trer. Mais si on donne 100 au diametre, la circonference sera $\frac{800}{3} + \frac{800}{35} + \frac{800}{99} + \frac{800}{195} + \frac{800}{323} + \frac{800}{483} + \frac{800}{675}$, &c. & si on reduit en entiers toutes ces fractions, en les prolongeant aux moins dix fois plus avant qu'elles ne sont pas icy, la circonference sera environ 314. Ainsi l'on void que le diametre d'un cercle est à sa circonference à peu prés comme 100 à 314, ce qui restoit à demontrer.

Comme cette raison demande une plus longue suite de termes que la precedente, on void évidemment qu'elle doit être plus exacte, & c'est pour cela, & aussi parce qu'elle est plus commode dans la pratique, que nous nous en servirons dans la suite.

THEOREME VIII.

L'aire d'un cercle eſt au quarré de ſon diametre, comme 785 *à* 1000.

SI on ſuppoſe que le diametre d'un cercle ſoit 100, ſa circonference ſera 314, par le Theoreme precedent, & parce que l'aire d'un cercle eſt la moitié d'un rectangle ſous le rayon & la circonference, par *Theor.* 6. ſi on multiplie la circonference 314 par le rayon 50, on aura 15700 pour le contenu de ce rectangle, dont la moitié 7850 ſera l'aire du cercle. Et ſi on multiplie le diametre 100 par lui-même, on aura 10000 pour le quarré du diametre. Ainſi le contenu du cercle eſt au quarré de ſon diametre, comme 7850 à 10000, ou comme 785 à 1000. Ce qu'il faloit demontrer.

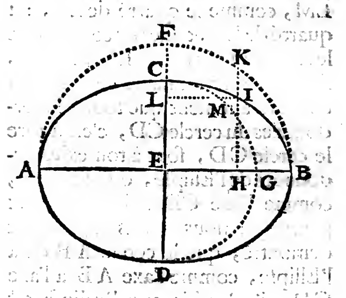
THEOREME IX.

Une Ellipse est égale à un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre les deux axes.

POur demontrer que l'Ellipse ACBD est égale à un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre ses deux axes AB, CD, décrivez du centre E, alentour des deux axes A B, C D, les Demi-cercles AFB, CGD, & tirez du point I pris à discretion sur la circonference de l'Ellipse, aux deux axes AB, CD, les perpendiculaires IH, IL, qui coupent les circonferences des Demi-cercles aux points K, M.

Cette preparation étant faite, on connoist par la proprieté commune de l'Ellipse, que puisque CE, IH, sont deux ordonnées à l'axe AB, le rectangle AEB, ou le quarré de EF,

est au rectangle AHB, c'est à dire au quarré de HK, comme le quarré de CE, au quarré de IH; c'est



pourquoy par 21. 6. les quatre lignes EF, HK, CE, HI, seront proportionnelles; d'où il est aisé de conclurre, que toutes les ordonnées du cercle AB, c'est à dire le cercle AB, sont à toutes les ordonnées de l'Ellipse, ou à l'Ellipse, comme l'axe AB à l'axe CD. Pareillement puisque EB, LI, sont deux ordon-

nées à l'axe CD, le rectangle CED, ou le quarré de EG, est au rectangle CLM, c'est à dire au quarré de LM, comme le quarré de EB, au quarré de LI; & que par consequent les quatre lignes EG, LM, EB, LI, sont proportionnelles; d'où l'on conclud aisément que toutes les ordonnées du cercle CD, c'est à dire le cercle CD, sont à toutes les ordonnées de l'Ellipse, ou à l'Ellipse, comme l'axe CD à l'axe AB: & parce que nous avons auparavant demontré, que le cercle A B est à l'Ellipse, comme l'axe A B à l'axe CD, il s'ensuit que l'Ellipse est moyenne proportionnelle entre les cercles AB, CD, & que par consequent elle est égale à un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre les deux axes AB, CD. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME X.

Une Ellipse est au rectangle sous ses deux axes, comme 785 à 100.

PUisqu'un cercle est au quarré de son diametre comme 785 à 1000, par *Theor.* 8. & que par le Theoreme precedent une Ellipse est égale à un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre ses deux axes, on peut mettre à la place du premier cercle une Ellipse, & à la place du quarré du diametre le rectangle sous les deux axes, & il sera vray de dire qu'une Ellipse est au rectangle sous ses deux axes, comme 785 à 1000. Ce qu'il faloit demontrer.



THEOREME XI.

La surface d'un cylindre droit est égale au rectangle sous sa hauteur & la circonference de sa base.

POur demontrer que la surface d'un cylindre droit est égale au rectangle sous sa hauteur & la circonference du cercle, qui luy sert de base; que l'on divise cette circonference en une infinité de parties égales, & que des points de division on éleve sur la base autant de perpendiculaires, qui seront égales entre-elles & à la hauteur du cylindre, & representeront autant de rectangles infiniment petits, dont la surface du cylindre sera composée, & dont la hauteur commune sera la même que celle du cylindre. C'est pourquoy la somme de tous ces rectangles infinis, ou la surface du cylindre, doit être égale, par 1. 2.

au ſeul rectangle ſous la hauteur du cylindre & la ſomme des baſes infinies de tous les rectangles, c'eſt à dire la circonference du cercle, qui ſert de baſe au cylindre. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME XII.

La ſurface d'un cone droit eſt la moitié d'un rectangle ſous le côté du cone & la circonference de ſa baſe.

POur demontrer que la ſurface d'un cone droit eſt la moitié d'un rectangle ſous le côté du cone & la circonference du cercle qui luy ſert de baſe; que l'on diviſe, comme auparavant, cette baſe en une infinité de parties égales, & que par les points de diviſion on tire à la pointe du cone autant de lignes droites, qui feront égales entre-elles & repreſenteront les côtez d'une infinité de triangles Iſoſceles, dont la

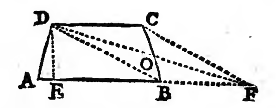
Surface du cone sera composée, & dont la hauteur commune sera le côté du cone: & parce que chacun de ces triangles est la moitié d'un rectangle qui a même base & même hauteur; par 41. 1. il s'ensuit que la somme de ces mêmes triangles, c'est à dire la surface du cone, est aussi la moitié de la somme de tous les rectangles, c'est à dire du seul rectangle sous le côté du cone & la circonference du cercle, qui luy sert de base. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME XIII.

L'aire d'un Trapeze, qui a deux côtez paralleles, est la moitié d'un rectangle sous la somme des deux côtez paralleles & la perpendiculaire tirée entre ces deux mêmes côtez.

Pour demontrer que si les deux côtez AB, CD, du Trapeze ABCD, sont paralleles, ce Tra-

peze eſt la moitié du rectangle ſous la ſomme des deux côtez paralleles AB, CD, & la perpendiculaire DE tirée entre ces deux mêmes côtez ; que l'on tire par le point C à la diagonale DB, la parallele CF,



qui rencontrera le côté AB prolongé en F, par lequel & par le point D, on tirera la droite DF.

Cette preparation étant faite, on connoiſt par 34. 1. que la figure BFCD étant un parellelogramme, les deux côtez oppoſez BF, CD, ſont égaux, & qu'ainſi la ligne AF eſt la ſomme des deux côtez paralleles AB, CD. On void auſſi, par 37. 1. que les triangles CFD, BFD, ſont égaux, c'eſt pourquoy ſi de chacun on ôte le triangle commun

COF, il reſtera le triangle COD égal au triangle BOF, & ſi à chacun de ces deux triangles égaux on ajoûte le trapeze ABOD, on aura le grand Trapeze ABCD égal au grand triangle ADF, lequel étant la moitié du rectangle ſous ſa baſe AF & ſa hauteur DE, par 41. 1. le Trapeze ABCD eſt auſſi la moitié du même rectangle. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME XIV.

La ſurface d'un cone droit tronqué eſt la moitié du rectangle ſous ſon côté & la ſomme des circonferences des deux baſes oppoſées & paralleles.

Pour demontrer la verité de ce Theoreme, diviſons par penſée les circonferences des deux cercles oppoſez, qui ſervent de baſes à ce cone tronqué, en une infinité de parties égales, & faiſons paſſer par

les points oppoſez de diviſion des lignes droites, qui repreſenteront une infinité de petits Trapezes, dont toute la ſurface du cone tronqué ſera compoſée, & dont les perpendiculaires compriſes entre les deux côtez paralleles ſeront égales entre elles & au côté du cone tronqué: & comme l'un de ces Trapezes eſt, par le Theoreme precedent, la moitié du rectangle ſous la ſomme des deux côtez oppoſez & la perpendiculaire tirée entre ces deux côtez, il eſt aiſé de conclurre, que la ſomme de tous ces Trapezes, ou la ſurface du cone tronqué eſt la moitié de la ſomme de tous les rectangles, c'eſt à dire du ſeul rectangle ſous la ſomme des circonferences des deux cercles oppoſez qui ſervent de baſes au cone tronqué, & la hauteur commune de tous ces rectangles, ou le côté du cone tronqué. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME XV.

Le quarré du diametre d'une ſphere eſt à la ſurface de la même ſphere, comme 100 *à* 314.

PUiſque par *Theor.* 8. l'aire d'un cercle eſt au quarré de ſon diametre, comme 785 à 1000, l'aire du grand cercle d'une ſphere ſera à 785, comme le quarré du diametre à 1000: & puiſque par *Prop.* 30. *l.* 1. *d'Archimede de la ſphere & du cylindre*, la même aire eſt à la ſurface de la ſphere, comme 1 à 4, ou comme 785 à 3140, il s'enſuit que le quarré du diametre d'une ſphere eſt à la ſurface de la même ſphere, comme 1000 à 3140, ou comme 100 à 314. Ce qu'il faloit demontrer.



CHAPITRE II.

PROBLEMES.

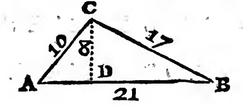
PROBLEME I.

Mesurer un triangle.

UN triangle se peut mesurer en deux façons, sçavoir par la perpendiculaire, & sans la perpendiculaire. Le voulant mesurer par la perpendiculaire, tirez-la, pour une plus grande commodité, du plus grand angle sur le plus grand côté, aprés quoy vous chercherez les Segmens, & en suite la perpendiculaire, comme il a été enseigné dans la Trigonometrie. Cette perpendiculaire étant ainsi trouvée, on la doit multiplier par le côté sur lequel elle tombe, & la moitié du produit donnera le contenu du triangle proposé par 41. 1.

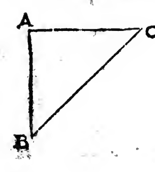
Ainsi pour trouver le contenu du

triangle ABC, dont les côtez sont ſuppoſez d'autant de toiſes que vous



les voyez marquez dans la figure, tirez du plus grand angle C, ſur le plus grand côté AB, la perpendiculaire CD, qui ſe trouvera de 8 toiſes, leſquelles étant multipliées par les 21 toiſes du côté AB, ſur lequel elle tombe, la moitié du produit donnera 84 toiſes quarrées pour le contenu du triangle propoſé ABC.

Il eſt bien évident qu'il ne ſera



pas beſoin, ſi l'on ne veut, de tirer aucune perpendiculaire, lorſque le triangle ſera rectangle, comme

ABC, parce que l'un des côtez servira de perpendiculaire. Ainsi il n'y aura qu'à multiplier ensemble les deux côtez AB, AC, & prendre la moitié de leur produit.

Tant soit peu qu'on s'éloigne de la veritable longueur de la perpendiculaire, qui se trouve rarement rationnelle & sans fractions, on s'éloignera sensiblement de la veritable aire du triangle. Sur tout lorsque le côté sur lequel elle tombe sera bien grand. C'est pourquoy il vaudra mieux mesurer le triangle sans la perpendiculaire en cette sorte.

Ajoûtez ensemble les trois côtez, pour avoir leur somme 48. dont la moitié est 24: ostez de cette moitié 24 chacun des trois côtez, l'un aprés l'autre, pour avoir les trois differences 14, 7, 3. Multipliez la même moitié 24 par l'une des trois differences precedentes, comme par la troisiéme 3, & le produit 72

par l'une des deux autres differences, comme par la feconde 7, & ce fecond produit 504 par la difference qui refte 14, pour avoir un troifiéme produit 7056, dont la racine quarrée donnera, comme auparavant, 84 toifes quarrées pour l'aire qu'on cherche.

Si vous ne pouvez pas prendre exactement la moitié de la fomme de tous les côtez, en forte qu'il refte quelque chofe, il ne faudra pas negliger ce refte: mais pour éviter les fractions, qui donnent de la peine à ceux qui n'y font pas accoûtumez, doublez les nombres des toifes de chaque côté du triangle, & fervez-vous de ces côtez ainfi doublez pour trouver l'aire du triangle, laquelle il faudra divifer par 4, pour avoir celle du triangle propofé, parce que quand on double les côtez d'un triangle, il vient un triangle quadruple, par 19. 6.

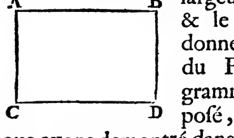
Si les côtez du triangle font exprimez

primez par des fractions, on les reduira tous en même denomination, & sans avoir égard au denominateur commun, on cherchera l'aire du triangle, laquelle on divisera par le quarré du denominateur commun, pour avoir l'aire du triangle proposé.

PROBLEME II.

Mesurer un Parallelogramme.

SI le Parallelogramme est un rectangle, comme ABCD on multipliera la longueur AB par la largeur AC, & le produit donnera l'aire du Parallelogramme proposé, comme nous avons demontré dans la preface de cette troisiéme Partie.



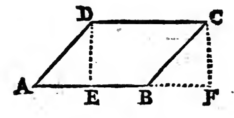
Comme il ne s'agit icy que de

multiplier deux lignes enſemble, & qu'il arrive ſouvent que ces lignes ſont exprimées par des fractions, comme ſi la longueur étoit de 3 toiſes & 2 pieds, & la largeur de 2 toiſes & 3 pieds, il faudroit reduire les toiſes en pieds, & multiplier les 20 pieds de la longueur par les 15 de la largeur, & le produit donnera 300 pieds quarrez pour l'aire qu'on cherche, que l'on reduira ſi l'on veut en toiſes quarrées, en les diviſant par 36, parce qu'une toiſe quarrée a 36 pieds quarrez, &c.

Si les côtez eſtoient exprimez en toiſes, pieds, & pouces, il les faudroit toûjours reduire en la plus baſſe eſpece, comme icy en pouces, en multipliant les toiſes par 6, parce qu'une toiſe courante a 6 pieds, pour avoir des pieds, auſquels on ajoûtera les pieds donnez, & en multipliant la ſomme de ces pieds par 12, pour avoir des pouces, auſquels on ajoûtera les pouces don-

nez, aprés quoy on trouvera l'aire en pouces quarrez, qu'on reduira en pieds quarrez en les divisant par 144, & les pieds quarrez en toises quarrées en les divisant par 36.

Si le Parallelogramme proposé n'est pas rectangle, comme ABCD,

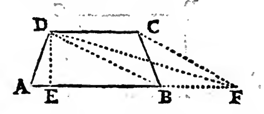


on fera tomber de l'un de ses angles, comme D, sur son côté opposé AB, la perpendiculaire DE, que l'on doit mesurer, & multiplier sa longueur par celle du côté A B, sur lequel elle tombe, & le produit donnera le contenu qu'on cherche, parce qu'ainsi on a l'aire du Parallelogramme rectangle C D E F, lequel est égal au proposé ABCD, par 35. 1.

PROBLEME III.

Mesurer un Trapeze.

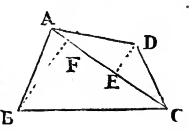
SI le Trapeze a deux côtez paralleles, comme ABCD, dont les deux côtez AB, CD, sont pa-



ralleles, on tirera entre ces deux côtez paralleles la perpendiculaire DE, & on en multipliera la longueur par la somme des deux côtez paralleles AB, CD, & la moitié du produit donnera l'aire qu'on cherche, comme il est évident par *Theor.* 13.

Mais si le Trapeze proposé n'a point de côtez paralleles, comme ABCD, on le reduira en deux

triangles par une diagonale, comme par la diagonale AC: car si par *Probl.* 1. on mesure à part chacun des deux



triangles ACB, ACD, la somme de leurs aires donnera celle de la figure proposée ABCD.

Si vous vous servez de la perpendiculaire pour mesurer ces deux triangles, il sera bon de la tirer dans chaque triangle sur la même diagonale AC, comme DE, BF. Car si on multiplie la somme des deux perpendiculaires DE, BF, par le côté commun AC, la moitié du produit donnera l'aire du Trapeze proposé ABCD.

Quand nous disons qu'il faut multiplier ensemble deux lignes, cela suppose qu'on en connoisse les longueurs, ce qui se peut faire en les mesurant actuellement sur le terrain

avec un cordeau, ou autrement, ou en les portant sur l'Echelle particuliere du Plan, si le Trapeze est racourcy sur le papier.

PROBLEME IV.

Mesurer un Polygone.

SI le Polygone est regulier, comme BCDEFG, on multipliera la somme de tous les côtez par la perpendiculaire AH, qui tombe du centre A sur le milieu du côté CD, & la moitié du produit donnera l'aire de l'Exagone proposé BCDEFG, com-

me il eſt évident par *Theor.* 5.

Quand on a meſuré le côté CD, on peut connoiſtre tres-exactement la perpendiculaire A H par la Trigonometrie dans le triangle rectangle AHD, ou AHC, dans lequel on connoiſt outre les angles, le côté DH, ou CH, moitié du côté connu CD, que nous ſuppoſerons de 10 toiſes, en faiſant cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
A la Tangente de la moitié de l'angle du Polygone 173205
Ainſi la moitié du côté du Polygone 5
A la perpendiculaire 8

qui ſe trouvera d'environ 8 toiſes & 4 pieds, leſquels eſtant multipliez par le contour du Polygone, ſçavoir par 60 toiſes, ou 360 pieds, la moitié du produit donnera environ 260 toiſes quarrées pour le contenu de l'Exagone propoſé BCDEFG.

Tant ſoit peu qu'on s'éloigne de

la veritable longueur de la perpendiculaire, en negligeant les fractions, on s'éloignera beaucoup de la veritable aire : & pour la trouver avec toute l'exactitude possible sans passer par les fractions, faites ainsi.

Divisez 360 degrez par le nombre des côtez du Polygone, comme icy par 6, pour avoir l'angle du centre C A D, qui se trouvera de 60 degrez, dont la moitié donne l'angle C A H de 30 degrez, & le complement de cette moitié donne la moitié de l'angle du Polygone A C H de 60 degrez, dont la Tangente est 1732050 ; que l'on multipliera par l'un des côtez du Polygone, sçavoir par 10, & le produit 17320500 par la somme 60 des côtez, pour avoir un second produit 1039230000, qu'il faudra toûjours diviser par le quadruple du rayon, sçavoir par 400000, & le quotient donnera 259 toises quarrées, & environ 29 pieds quarrez pour l'aire qu'on cherche.

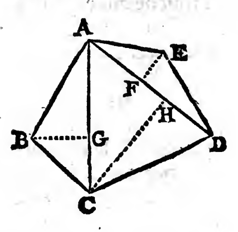
C'eſt par cette maniere que nous avons ſupputé la Table ſuivante, qui montre les aires des Polygones,

Pentagone	1720475
Exagone	2598075
Eptagone	3633525
Octogone	4828427
Enneagone	6181824
Decagone	7694200
Ondecagone	9363805
Dodecagone	11196152

depuis le Pentagone juſqu'au Dodecagone, le côté du Polygone étant par tout de mille parties. Par le moyen de cette Table on peut aiſément trouver l'aire d'un Polygone, dont le côté ſera plus ou moins de 1000 parties : car puiſque les Polygones ſemblables ſont comme les quarrez de leurs côtez homologues, par 20. 6. il n'y a qu'à multiplier le quarré du côté du Polygone propoſé par l'aire qui luy répond dans la Table precedente, & diviſer le produit par le quarré de

mille, sçavoir par 1000000. Comme icy 100 par 2598075, & diviser le produit 259807500 par 1000000, & le quotient donnera 259 toises quarrées & 29 pieds quarrez, comme auparavant, pour l'aire de l'Exagone proposé BCDEFG.

Si le Polygone proposé n'est pas regulier, comme le Pentagone ABCDE, on le reduira en triangles par plusieurs diagonales, que l'on tirera par deux angles tels que l'on voudra, comme icy en trois



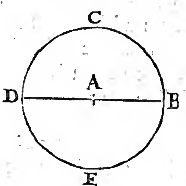
triangles par les deux diagonales AC, AD, & mesurant à part

les aires de chacun des trois triangles ADE, ADC, ABC, par *Probl.* 1. leur somme donnera celle du Pentagone proposé ABCDE.

PROBLEME V.

Mesurer un cercle.

PRemierement si l'on veut trouver la circonference BCDE, le diametre BD, étant supposé connu comme de 50 pieds, on multipliera le diametre 50 toûjours par 314, & on divisera le produit 15700 toûjours par 100, & le quotient donnera 157 pieds pour la circonference qu'on cherche, comme il est évident par *Theor.* 7.



Il faudroit faire tout le contraire, si on vouloit trouver le diametre d'un cercle par sa circonference connuë, c'est à dire qu'il faudroit multiplier la circonference connuë par 100, & diviser le produit par 314.

Ainsi on pourra connoistre facilement le diametre de la Terre, ou la distance qu'il y a d'icy à nos Antipodes. Car ayant reconnu par observation, qu'un degré de la Terre vaut environ 20 lieuës communes de France, si on multiplie ces 20 lieuës par 360, on aura 7200 lieuës pour la circonference de la Terre, qui étant multipliée par 100, & le produit 720000 étant divisé par 314 le quotient donnera environ 2293 lieuës pour le diametre qu'on cherche.

Secondement si l'on veut trouver l'aire du cercle, dont le diametre BD soit connu, comme de 50 pieds, ayant trouvé sa circonference de 157

pieds, on la multipliera par le diametre 50, & le produit 7850. étant divisé par 4, on aura 1962. pieds quarrez & 72. pouces quarrez pour l'aire qu'on cherche, comme il est évident par *Theor. 6.*

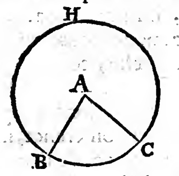
Pour éviter les fractions, qui peuvent arriver à la circonference, multipliez le quarré 2500. du diametre 50, toûjours par 785, & divisez le produit 1962500. toûjours par 1000, & le quotient donnera 1962. pieds quarrez & 72. pouces quarrez comme auparavant, pour l'aire du cercle proposé ABCD, comme il est évident par *Theor. 8.*

PROBLEME VI.

Mesurer un Secteur de cercle.

POur trouver l'aire du Secteur ABC, dont les rayons AB, AC, sont supposez chacun de 100. pieds, & l'arc BC, ou l'angle BAC

de 50. degrez, on cherchera premierement par le Probleme precedent, l'aire du cercle entier, laquelle se trouvera de 31400. pieds quarrez: & comme l'aire du Secteur est à celle du cercle entier, comme son arc à la circonference entiere, c'est à dire icy comme 50. à 360, si on multiplie l'aire du cercle 1400. par 50, & qu'on divise le produit 1570000. par 360, le quotient donnera 4361. pieds quarrez & 16. pouces quarrez pour l'aire qu'on cherche.



Pour éviter les fractions, qui peuvent arriver dans l'aire du cercle, multipliez le quarré 40000. du diametre 200. toûjours par 157, & le produit 6280000. par les degrez de l'angle du Secteur, comme icy par

50, & divisez ce second produit 3140000o. toûjours par 72000, & le quotient donnera, comme auparavant, 4361. pieds quarrez & 16. pouces quarrez pour le contenu du Secteur proposé ABC.

PROBLEME VII.

Mesurer un Segment de cercle.

Il est évident que pour trouver l'aire du Segment BDC, il n'y a qu'a ôter le triangle ABD du Secteur ABCD, & qu'ainsi on doit connoistre, comme auparavant, le Rayon AB, ou AD, & l'arc BCD, ou l'angle BAD. Nous les supposerons tels qu'ils ont été supposez au Probleme precedent, aprés quoy il ne sera pas difficile de trouver l'aire du

triangle Isoscele ABC, où l'on connoist outre les angles le côté AB ou AD, ce qui fait qu'on pourra connoistre par la Trigonometrie le troisiéme côté BD, & en suite l'aire du triangle ABD, par *Probl.* 1. Mais pour trouver l'aire de ce triangle methodiquement & tres-exactement faites ainsi.

Multipliez le Sinus 42262 de la moitié de l'angle du Secteur, ou de 25 degrez, par le Sinus 90631 du complement de cette même moitié, & multipliez le produit 3830247322 par le quarré 40000 du diametre 200, pour avoir un second produit 153209892880000, lequel étant divisé par le quadruple du quarré du Sinus Total, sçavoir par 40000000000, le quotient donnera 3830 pieds quarrez & environ 36 pouces quarrez pour l'aire du triangle ABD, laquelle étant ôtée de celle du Secteur ABCD, qui a été trouvée au Probleme precedent de

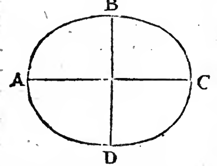
4361 pieds quarrez & d'environ 16 pouces quarrez, le reste 530 pieds quarrez & 124 pouces quarrez sera l'aire du Segment proposé BDC.

Pour éviter les grands nombres, qui arrivent icy, servez-vous des Logarithmes, & ajoûtez ensemble ces trois choses, le Logarithme 96259482 du Sinus de la moitié de l'angle du Secteur, le Logarithme 99572757 du Sinus du complement de la même moitié, & le double 46020598 du Logarithme 23010-299 du diametre 200, & ôtez de la somme 241852837 la somme 2060-20599 du Logarithme 06020599 de 4, & du double 200000000 du Logarithme 100000000 du Sinus Total, le reste 35832238 sera le Logarithme de 3830 pieds quarrez & 36 pouces quarrez pour l'aire du triangle ABD.

PROBLEME III.

Mesurer une Ellipse.

POur trouver l'aire de l'Ellipse ABCD, dont le plus grand axe AC est supposé de 200. pieds, & le plus petit BD de 144, multipliez ensemble ces deux axes, pour avoir le contenu

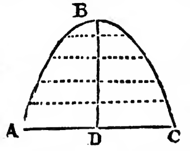


de leur rectangle, 28800, qu'il faudra toûjours multiplier par 785, & diviser le produit 22608000. toûjours par 1000, & le quotient donnera 22608, pieds quarrez pour l'aire de l'Ellipse proposée ACBD, comme il est évident par *Theor.* 10.

PROBLEME IX.

Mesurer une Parabole.

POur trouver le contenu de la Parabole ABC, dont la base AC est supposée de 180. pieds, & la hauteur BD de 108, multipliez ensemble ces deux lignes AC, BD, pour avoir

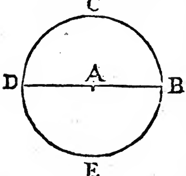


leur rectangle 19440, dont le double 38880. étant divisé par 3, on aura 12960. pieds quarrez pour l'aire de la Parabole proposée ABC, comme il est évident par *Theor.* 2.

PROBLEME X.

Mesurer la Surface d'une sphere.

POur trouver la Surface de la sphere BCDE, dont le diametre BD est supposé de 200. pieds, multipliez ce diametre 200 par luy-même, pour avoir son quarré 40000, qu'il faudra multiplier



toûjours par 314, & diviser le produit 12560000. toûjours par 100, & le quotient donnera 125600. pieds quarrez pour la Surface de la sphere proposée BCDE, comme il est évident par *Theor*. 15.

Ainsi parce que le diametre de la Terre est d'environ 2293. lieuës communes de France, sa Surface se

trouvera d'environ 720002. lieuës quarrées.

PROBLEME XI.

Mesurer la Surface d'un Segment de Sphere.

POur trouver la Surface du Segment de ſphere BCD, le diametre AB étant ſuppoſé de 200. pieds, & l'arc BDC de 80. degrez, on cherchera l'aire d'un cercle, dont le rayon ſoit égal à la corde BD de la moitié de l'arc BDC, & cette aire donnera celle du Segment propoſé BCD, par *Prop. 36. liv. 1. d'Archimede de la Sphere & du Cylindre.* Ainſi toute la difficulté eſt de trouver le rayon BD, ce que l'on fera aiſément par cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
Au diametre AB 200
Ainsi le Sinus du quart de l'arc BC 34202
A la ligne BD 68

qui se trouvera de 68. pieds & d'environ 5. pouces.

De ce que l'aire du Segment BCD est égale au cercle, dont le rayon est BD, il s'ensuit que cette même aire est aussi égale au rectangle sous la hauteur DE & la circonference du grand cercle de la sphere. La circonference du grand cercle se peut trouver par *Probl.* 5. & la hauteur DE par cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
Au demi-diametre DF 100
Ainsi le Sinus du complement de la moitié de l'arc BDC 76604
A la ligne EF 76

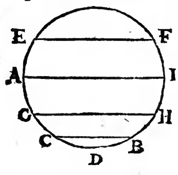
laquelle se trouvera de 76. pieds & d'environ 7. pouces, lesquels étant ôtez du demi-diametre DF 100, il restera 23. pieds & 5. pouces pour la hauteur DE.

Mais pour venir à la pratique, & pour trouver methodiquement & exactement l'aire du Segment proposé BCD, sans passer par les fractions, multipliez le sinus 34202. du quart de l'arc BDC par le diametre AB 200, & multipliez le produit 6440400. par luy-même, pour avoir son quarré 4679107216000o, qu'il faudra multiplier toûjours par 314, & diviser le produit 146923-96658240000. toujours par cent fois le quarré du Sinus Total, sçavoir par 1000000000000, & le quotient donnera 14692. pieds quarrez & environ 57. pouces quarrez pour la Surface du Segment proposé BCD.

Pour avoir un calcul moins long, servez-vous des Logarithmes, & ajoûtez le Logarithme 95340517. du Sinus du quart de l'arc BDC au Logarithme 23010300. du diametre AB 200, la somme sera 118350817, dont le double est 236701634, auquel vous ajoûterez

le Logarithme 24969296 de 314, & vous ôterez de la somme 261670930 la somme 220000000 du Logarithme 20000000 de 100, & du double 200000000 du Logarithme 100000000 du Sinus Total, & il restera ce Logarithme 41670930, auquel il répond dans les Tables 14692 pieds quarrez & environ 57 pouces quarrez pour l'aire qu'on cherche.

Par cette maniere de mesurer la Surface d'un Segment de sphere, on pourra mesurer cette partie de la Surface, de la Terre, qui est terminée par l'un des cercles Polaires, & qu'on appelle *zone froide*, comme BCD, dont l'arc BDC, est de 47 degrez.



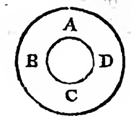
On pourra de la même façon mesurer

furer la Surface du Segment GDH, terminé par le Tropique GH, & dont l'arc GDH est de 133 degrez. Et si de ce Segment on ôte le premier, il restera la portion GCBH, qu'on appelle *zone temperée*; & si on ôte le double de ce même Segment de la Surface entiere de la Terre, il restera la zone GHFE, qu'on nomme *zone torride*.

PROBLEME XII.

Mesurer une Couronne.

ON void aisément que pour trouver l'aire de la Couronne ABCD, qui est terminée par les circonferences de deux cercles concentriques, dont les diametres sont supposez connus, comme le plus grand de 200, & le plus petit de 122.



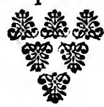
pieds, il n'y a qu'à ôter l'aire du petit cercle, laquelle se trouvera de 11683. pieds quarrez & d'environ 135. pouces quarrez, par *Probl. 5.* de celle du grand cercle, laquelle se trouvera de 31400. pieds quarrez, le reste donnera 19716. pieds quarrez & 9. pouces quarrez pour l'aire de la couronne proposée ABCD.

Ou bien plus facilement, pour éviter les fractions, qui peuvent arriver dans l'aire de chaque cercle, multipliez la somme 322. des deux diametres par leur difference 78, & multipliez le produit 25116. toûjours par 157, & divisez ce second produit 3943212. toûjours par 200, le quotient donnera comme auparavant, 19716. pieds quarrez & environ 9. pouces quarrez, pour l'aire qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Mesurer la Surface d'un Cylindre droit.

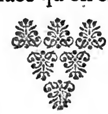
LE *Theor.* 11. vous apprend, que pour trouver la Surface d'un Cylindre droit, on doit multiplier la circonference du cercle, qui luy sert de base par sa hauteur, & qu'ainsi il faut connoistre la hauteur du Cylindre & le diametre de sa base, & alors pour éviter les fractions, qui peuvent arriver à la circonference, multipliez le rectangle sous le diametre & la hauteur toûjours par 314, & divisez le produit toûjours par 100, le quotient donnera la Surface qu'on cherche.



PROBLEME XIV.

Mesurer la Surface d'un Cone droit.

LE *Theor.* 12. nous apprend que pour trouver la Surface d'un Cone droit, on doit multiplier la circonference du cercle, qui luy sert de base par son côté, & prendre la moitié du produit, & qu'ainsi il faut connoistre le côté du Cone & le diametre de sa base, & alors pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la circonference, multipliez le rectangle sous le diametre de la base & le côté du Cone toûjours par 157, & divisez le produit toûjours par 100, le quotient donnera la Surface qu'on cherche.



PROBLEME XV.

Mesurer la Surface d'un cone tronqué.

LE *Theor.* 14. Nous apprend que pour trouver la Surface d'un Cone tronqué, on doit multiplier la somme des circonferences des deux cercles opposez qui luy servent de bases par son côté, & prendre la moitié du produit, & qu'ainsi il faut connoistre le côté du Cone tronqué & les diametres des deux bases; & alors pour éviter les fractions, qui peuvent arriver à la circonference de chaque base, multipliez le rectangle sous le côté du Cone tronqué & la somme des diametres des deux bases toûjours par 157, & divisez le produit toûjours par 100, le quotient donnera la Surface qu'on cherche.

Nous ne donnons point les demonstrations de tous ces petits

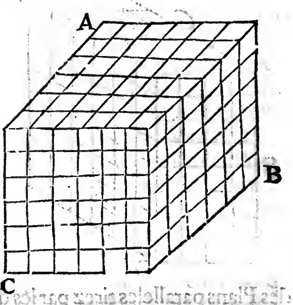
abregez, parce qu'elles ſont faciles à trouver.

QUATRIE'ME PARTIE DE LA STEREOMETRIE.

LA meſure des ſolides ou des corps, ſe fait par de petits ſolides, comme la meſure des Plans ſe fait par de petits Plans, & la meſure des Lignes par de petites Lignes, parce qu'une meſure doit être de même genre avec la quantité qu'elle meſure. C'eſt pourquoy la meſure des ſolides ſe doit faire par des ſolides, que l'on fait cubiques ; parce qu'ils ſont plus commodes, comme par des toiſes cubiques, des pieds cubiques, &c.

Comme ſi du cube ABC, chacun des côtez étoit par exemple

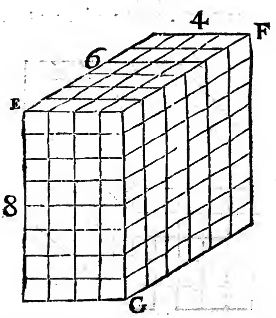
de 6. pieds, en ſorte que ce cube repreſentât une toiſe cubique, la ſolidité de cette toiſe cubique ſe trouveroit de 216. pieds cubiques, qui



ſont produits par l'interſection de certains Plans paralleles tirez en long & en travers par les diviſions des côtez oppoſez du cube propoſé ABC.

De même pour avoir la capacité du Parallelepipede rectangle EFG, dont les côtez ſont ſuppoſez d'au-

tant de pieds que vous les voyez icy marquez, nous nous imaginerons



des Plans paralleles tirez par les divisions des côtez opposez, & ces Plans feront par leurs mutuelles intersections 192 pieds cubiques pour la solidité du Parallelepipede proposé EFG.

Neanmoins la solidité de ce Parallelepipede rectangle se peut trouver avec bien moins de peine par la

ſeule multiplication : car ſi on multiplie le nombre des pieds quarrez de l'une de ſes faces rectangulaires par le nombre des pieds courants du côté perpendiculaire à cette même face ; ou plus facilement, ſi on multiplie enſemble les trois dimenſions de ce corps, on aura le nombre des pieds cubiques contenus dans ce même corps. Il en eſt de même du cube precedent ABC.

D'où il ſuit que quand on multiplie trois lignes enſemble ; on a la capacité de leur ſolide, c'eſt à dire d'un Parallelepipede rectangle, dont elles repreſentent la longueur, la largeur, & la hauteur ; & que quand on multiplie un quarré par ſon côté, on a le cube de ce côté. Ainſi on connoiſtra qu'une toiſe courante ayant 6 pieds, une toiſe cubique aura 216 pieds cubiques ; & qu'un pied ayant 12 pouces, un pied cubique aura 1728 pouces cubiques ; & que pareillement une

Perche ayant 18. pieds, une Perche cubique aura 5832. pieds cubiques ; ainsi des autres.

C'est pourquoy quand on aura des toises cubiques, à reduire en pieds cubiques, au lieu de multiplier ces toises par 6, on les multipliera par 216 ; & quand on aura des pieds cubiques à reduire en pouces cubiques, au lieu de multiplier ces pieds par 12, on les multipliera par 1728. Tout au contraire quand on aura des pieds cubiques à reduire en toises cubiques, au lieu de diviser ces pieds par 6, on les divisera 216 ; & quand on aura des pouces cubiques à reduire en pieds cubiques, au lieu de diviser ces pouces par 12, on les divisera par 1728, &c.

CHAPITRE I.

THEOREMES.

THEOREME I.

Une ſphere eſt le tiers d'un Priſme, dont la baſe eſt égale à la Surface de la ſphere, & la hauteur au rayon de la même ſphere.

POur la demonſtration de ce Theoreme, diviſez par penſée la Surface de la ſphere en une infinité de parties égales, leſquelles pourront être conſiderées comme les baſes d'autant de Cones, dont les pointes conviennent au centre de la ſphere, & dont la hauteur commune eſt par conſequent égale au rayon de la même ſphere : & comme l'un de ces Cones eſt le tiers d'un Priſme, qui a même baſe & même hauteur, par 10.12. il eſt aiſé

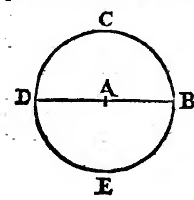
de conclurre que la ſomme de tous ces Cones, ou la ſphere entiere eſt le tiers d'un Priſme, dont la baſe eſt égale à la ſomme des baſes de tous ces Cones, c'eſt à dire à la Surface de la ſphere; & la hauteur la même que celles des Pyramides, ou que le rayon de la ſphere. Ce qu'il faloit demontrer. On demontrera de la même façon qu'un ſecteur de ſphere eſt le tiers d'un Priſme, dont la baſe eſt égale à la baſe du ſecteur & la hauteur au Rayon de la ſphere.

THEOREME II.

Une ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme 157, à 300.

SUppoſons que le diametre BD de la ſphere BCDE, ſoit de 30 pieds: la Surface de cette ſphere ſera de 2826 pieds quarrez, par *Probl. 9. chap. 1. Planim.* leſquels étant multipliez par le rayon de

la ſphere, qui ſera de 15 pieds, le tiers du produit donnera 14130 pieds cubiques pour la ſolidité de la ſphere BCDE, par le Theoreme precedent. Le cube du diametre BD



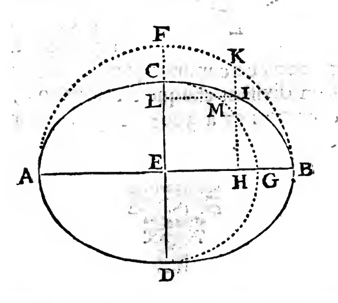
ſera 27000, ce qui fait voir que la ſphere BCDE eſt au cube de ſon diametre BD, comme 14130 à 27000, ou comme 1413 à 2700, ou (en diviſant chaque terme par 9,) comme 157 à 300; ce qu'il faloit demontrer.



THEOREME III.

Un Spheroïde est à une Sphere, dont le diametre est égal à l'axe de circonvolution, comme le quarré de l'autre axe au quarré du même axe de circonvolution.

SOit un Spheroïde ACBD, qui soit produit par la circonvolu-



tion d'une Ellipse alentour de l'axe

AB, lequel à cauſe de cela eſt appellé *axe de circonvolution*, & qu'ailleurs nous avons appellé *aiſſieu du Spheroïde*. Je dis que ce Spheroïde eſt à une ſphere, dont le diametre eſt égal à l'aiſſieu AB, comme le quarré de l'axe CD au quarré du même aiſſieu AB.

Car ſi on décrit du centre E de l'Ellipſe ACBD, alentour de l'axe de circonvolution AB le Demi-cercle AFB, ce Demi-cercle décrira par ſon mouvement une ſphere, dont le diametre ſera l'aiſſieu AB; & ſi par le point K pris à diſcretion ſur la Surface de cette ſphere, on tire ſur l'aiſſieu AB, la perpendiculaire KH, qui coupe la Surface du ſpheroïde en I, cette perpendiculaire KH ſera par la circonvolution du Demi-cercle AFB alentour de l'aiſſieu AB, un cercle qui ſe trouvera dans la ſphere AB; & pareillement la perpendiculaire correſpondante IH décrira par la

circonvolution de l'Ellipse ACB alentour du même aissieu AB un cercle, qui se trouvera dans le spheroïde, ACBD: & ce que je viens de dire de ces deux perpendiculaires se doit entendre de toutes les autres que l'on peut tirer par tous les points de l'aissieu AB, que l'on doit concevoir divisé en une infinité de parties égales. C'est pourquoy on peut considerer la sphere AB & le spheroïde ACBD comme les sommes d'autant de cercles infinis l'un que l'autre, ou si vous voulez d'autant de Cylindres infinis d'une même hauteur infiniment petite: & comme les bases de tous ces Cylindres infinis, ou ces cercles infinis sont comme les quarrez de leurs diametres, & par consequent de leurs Demi-diametres KH, IH, par 2. 12. & que ces Demi-diametres KH, IH, sont proportionnels aux deux FE, CE, & par consequent aux deux axes AB, CD, par

Theor. 9. *Planim*. on conclud aiſément que la ſomme de tous les cercles du ſpheroïde A C B D, ou le ſpheroïde ACBD eſt à la ſomme de tous les cercles de la ſphere AB, c'eſt à dire à la ſphere AB, comme le quarré de l'axe CD au quarré de l'axe de circonvolution A B. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME IV.

Un Spheroïde eſt au ſolide ſous l'axe de circonvolution & le quarré de l'autre axe, comme 157 *à* 300.

PUiſque par le Theoreme precedent, un ſpheroide eſt à une ſphere dont le diametre eſt égal à l'axe de circonvolution, comme le quarré de l'autre axe au quarré du même axe de circonvolution; ſi on donne à ces deux quarrez l'axe de circonvolution pour hauteur commune, le ſpheroide ſera à la ſphere,

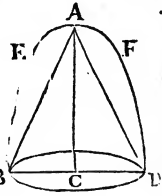
comme le ſolide ſous l'axe de circonvolution & le quarré de l'autre axe, au cube de l'axe de circonvolution : & en permutant, le ſpheroïde ſera au ſolide ſous l'axe de circonvolution & le quarré de l'autre axe, comme la ſphere au cube de l'axe de circonvolution, c'eſt à dire au cube de ſon diametre : & ſi à la place de ces deux derniers termes on met ces deux autres 157, 300, qui ſont en même raiſon, par *Theor.* 2. le ſpheroïde ſera au ſolide ſous l'axe de circonvolution & le quarré de l'autre axe, comme 157. à 300. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOREME V.

Un Paraboloïde eſt la moitié d'un Cylindre de même baſe & de même hauteur.

SOit le Paraboloïde AEBDF, dont la hauteur AC, & la baſe

un cercle, dont le diametre eſt BD.



Je dis que ce Paraboloïde eſt la moitié d'un Cylindre, dont la hauteur eſt A C, & la baſe eſt le cercle BD.

Car ſi on diviſe la hauteur A C en une infinité de parties égales, & que par les points de diviſion l'on tire dans la Parabole des lignes paralleles à ſa baſe BD, leſquelles par conſequent ſeront des ordonnées: comme ce Paraboloïde eſt produit par le mouvement de la Parabole BAD alentour de l'axe AC, toutes ces paralleles ou ordonnées décriront par ce mouvement des cercles: & parce que les quarrez de ces paralleles ou diametres ſont dans la proportion des nombres naturels, c'eſt à dire dans une continuelle pro-

portion arithmetique, par la proprieté de la Parabole, que l'on suppose plane, les cercles seront dans cette même proportion, par 2. 12. Ainsi on peut considerer le Paraboloïde comme un corps composé d'une infinité de cercles en continuelle proportion arithmetique, dont le plus grand est la base du Paraboloïde, & dont le nombre est representé par la hauteur AC. C'est pourquoy la somme de tous ces cercles infinis, ou le Paraboloïde, est par *Theor.* 3. *Planim.* la moitié du plus grand ou de la base multipliée par la hauteur AC, c'est à dire du Cylindre dont la hauteur & la base sont les mêmes que celles du Paraboloïde proposé AEBDF. Ce qu'il faloit demontrer.

CHAPITRE II.

PROBLEMES.

PROBLEME I.

Mesurer un Prisme.

SI le Prisme proposé est un Parallelepipede rectangle, on en trouvera la solidité, en multipliant ensemble ses trois dimensions, c'est à dire sa longueur, sa largeur, & sa profondeur, comme il est évident par ce qui a esté dit dans la preface de cette quatriéme Partie.

Si le Prisme proposé n'est pas un Parallelepipede on multipliera l'aire de l'une de ses deux bases paralleles par la perpendiculaire tirée entre ces deux mêmes bases, & le produit donnera la solidité qu'on cherche, parce qu'ainsi on a la solidité d'un Parallelepipede rectangle, qui est égal au Prisme pro-

posé par 31. 11.

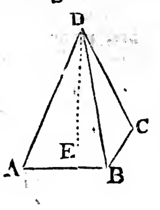
Ainsi vous voyez qu'il n'y a qu'à mesurer bien exactement la hauteur du Prisme, & sa base, dont l'aire se connoistra par les principes de la Planimetrie, car si elle est triangulaire, on la mesurera comme nous avons enseigné à mesurer un triangle; & pareillement si elle est un cercle, on la mesurera comme nous avons enseigné à mesurer un cercle: & alors pour éviter les fractions qui peuvent arriver dans la base de ce Prisme, lequel dans ce cas sera un Cylindre, multipliez le solide sous le quarré du diametre de la base & la hauteur du Cylindre toûjours par 785, & divisez le produit toûjours par 1000, pour avoir tres-exactement la solidité du Cylindre proposé.

PROBLEME II.

Mesurer une Pyramide.

LEs Pyramides de quelque figure qu'elles puissent estre, & quelque position qu'elles puissent avoir, se mesurent en multipliant la base par la hauteur, & en divisant le produit par 3. parce que par cette multiplication on trouve le contenu d'un Prisme, lequel est triple de la Pyramide, par 7. 12.

Si la base est un parallelogramme rectangle, comme ABC, on la mesurera, en multipliant sa longueur AB par sa largeur BC, comme vous avez vû dans la Planimetrie. Or comme dans ce cas, il ne



s'agit que de multiplier trois lignes ensemble, & qu'elles sont ordinairement representées par des fractions, on les reduira comme nous avons déja dit ailleurs en même denomination. Comme si la longueur AB étoit de 8 toises & 4 pieds, la largeur BC de 3 toises & 2 pieds, & la hauteur DE de 12 toises & 3 pieds, on reduira toutes ces lignes en pieds, & alors on trouvera la longueur AB de 52 pieds, la largeur BC de 20 pieds, & la hauteur DE de 75 pieds: aprés quoy on trouvera la solidité de la Pyramide ABCD en pieds cubiques, sçavoir en multipliant la longueur AB 52 par la largeur BC 20, pour avoir la base ABC de 1040 pieds quarrez, lesquels étant multipliez par la hauteur DE 75, le tiers du produit donnera 26000 pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche, qu'on reduira si l'on veut, en toises cubiques, en les divisant par 216,

&

& alors on aura 120 toises cubiques & 80 pieds cubiques pour la solidité de la Pyramide proposée A B C D.

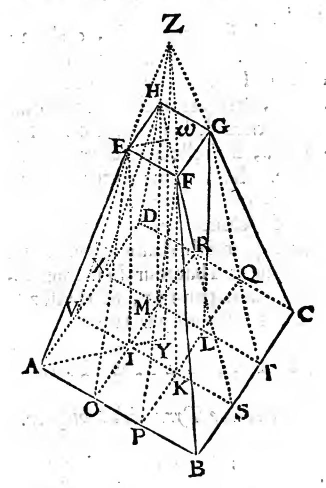
Si la base est un cercle, on la mesurera comme nous avons enseigné dans la Planimetrie à mesurer un cercle, & on la multipliera toûjours par le tiers de la hauteur de la Pyramide, laquelle dans ce cas sera un Cone. Mais pour éviter les fractions, qui peuvent arriver dans la base du Cone, multipliez le solide sous le quarré du diametre de la base du Cone & la hauteur du même Cone toûjours par 157, & divisez le produit toûjours par 600.

PROBLEME III.

Mesurer une Pyramide tronquée.

NOus supposerons icy pour une plus grande facilité, que la Pyramide tronquée est droite, &

qu'elle est terminée par les deux quarrez paralleles & inégaux AB-CD, EFGH. Nous suppóserons



aussi que le côté AB de la plus grande

base eſt de 14. pieds, que le côté EF de la plus petite baſe eſt de 4. pieds, & que la hauteur ωY de la Pyramide tronquée eſt de 30. pieds.

Cela eſtant ſuppoſé, pour trouver la ſolidité de cette Pyramide tronquée, on la reduira en des Priſmes & en des Pyramides. On verra icy aiſément qu'elle eſt compoſée de cinq Priſmes & de quatre Pyramides égales. Le premier de ces cinq Priſmes, eſt au milieu de tous les autres, & c'eſt un Parallelepipede rectangle, dont la baſe eſt le quarré IKLM égal au quarré EFGH, & dont la hauteur EI eſt la même que celle de la Pyramide tronquée. Les quatre autres Priſmes ſont égaux entre eux, parce que leur hauteur eſt égale, ſçavoir celle de la Pyramide tronquée, & que leurs baſes ſont pareillement égales, ſçavoir les quatre Parallelogrammes rectangles OPKI, KLTS, LMRQ, MIVX: mais ils ne ſont pas des pa-

rallelepipedes, mais ſeulement les moitiez d'autant de paralelepipedes de même baſe & de même hauteur, parce qu'ils ſe terminent en pointe, leurs ſommets étant les lignes du quarré EFGH. Les quatre pyramides, dont les pointes ſont les quatre points E, F, G, H, ſont pareillement égales, parce qu'elles ont une hauteur commune, qui eſt la même que celle de la Pyramide tronquée, & que leurs baſes ſont égales, ſçavoir les quatre quarrez AOIV, PBSK, LTCQ, MRDX.

Puiſque nous avons ſuppoſé AB de 14 pieds, & EF, ou IK de 4, le quarré IKLM ſe trouvera de 16 pieds quarrez, leſquels étant multipliez par la hauteur EI, que nous avons ſuppoſée de 30 pieds, on aura 480 pieds cubiques pour la ſolidité du parallelepipede rectangle EILG.

La ligne OP ſera de 4 pieds, & OI de 5, & l'aire de chacun des quatre parallelogrammes rectan-

gles OPKI, KSTL, LMRQ, MIVX, ſe trouvera de 20 pieds quarrez, c'eſt pourquoy la ſomme de ces quatre parallelogrammes ſera de 80 pieds quarrez, leſquels étant multipliez par la hauteur commune 30, la moitié du produit donnera 1200 pieds cubiques pour la ſomme des quatre Priſmes égaux, qui s'appuyent ſur les quatre rectangles precedens.

Enfin l'aire de chacun des quatre quarrez égaux AOIV, PBSK, LTCQ, DRMX, ſe trouvera de 25 pieds quarrez, c'eſt pourquoy la ſomme de ces quatre quarrez ſera de 100 pieds quarrez, leſquels étant multipliez par la hauteur commune 30, le tiers du produit donnera 1000 pieds cubiques pour la ſolidité des quatre Pyramides égales, qui s'appuyent ſur les quatre quarrez precedens.

Si l'on ajoûte enſemble ces trois ſoliditez trouvées 480, 1200, 1000,

leur somme donnera 2680. pieds cubiques pour la solidité de la Pyramide tronquée ACGE.

Comme il est embarassant de mesurer tant de Prismes & tant de Pyramides, lorsque la base de la Pyramide tronquée est composée d'un grand nombre de côtez, il vaudra mieux se servir de cette autre methode, qui est generale pour toute sorte de Pyramides tronquées.

Prolongez par pensée les côtez de la Pyramide tronquée jusqu'à ce qu'ils se coupent en un point, comme en Z, pour avoir deux Pyramides, dont la pointe commune sera Z, & dont les bases seront les deux bases ABCD, EFGH, de la Pyramide tronquée; & ôtez de la solidité de la plus grande Pyramide celle de la plus petite, pour avoir au reste la solidité de la Pyramide tronquée. Mais pour avoir la solidité de la plus grande & de la plus petite Pyramide, il suffira de connoistre

leurs hauteurs ZY, Zω, parce que leurs bafes ABCD, EFGH, font déja connuës; & pour connoiftre les hauteurs ZY, Zω, tirez les deux lignes AY, Eω, qui étant paralleles, feront les deux triangles femblables ZYA, ZωE, dans lefquels par 4. 6. on fera cette analogie, AY, Eω :: ZY, Zω; & fi au lieu des deux premiers termes AY, Eω, on met les deux côtez AB, EF, qui font en même raifon, on aura cette autre analogie, AB, EF :: ZY, Zω, & en divifant on aura celle-cy, AB, EF, AB :: ωY, ZY, & fi aux trois lignes AB, EF, ωY, on reftituë leurs valeurs fuppofées 14, 4, 30, on aura cette derniere analogie, 10, 14 :: 30, ZY, dont les trois premiers termes étant connus, le quatriéme ZY fe connoiftra en multipliant le troifiéme terme 30. par le fecond 14, & en divifant le produit 420. par le premier 10, & l'on aura 42. pieds

pour la hauteur ZY de la grande Pyramide, & si on en ôte la hauteur ω) de la Pyramide tronquée, qui a esté supposée de 30 pieds, il restera 12 pieds pour la hauteur Zω de la petite Pyramide.

Si on multiplie la base ABCD de la grande Pyramide, qui est icy 196 pieds quarrez, par sa hauteur ZY, qui a esté trouvée de 42 pieds, le tiers du produit donnera 2744 pieds cubiques pour la solidité de la grande Pyramide; & si on multiplie la base EFGH de la petite Pyramide, qui est icy de 16 pieds quarrez, par sa hauteur Zω, qui a esté trouvée de 12 pieds, le tiers du produit donnera 64 pieds cubiques pour la solidité de la petite Pyramide, laquelle estant ôtée de celle de la plus grande, que nous avons trouvée de 2744 pieds cubiques, le reste donnera 2680 pieds cubiques pour la solidité de la Pyramide tronquée, comme auparavant.

Bien que cette methode semble un peu longue, elle peut neanmoins être bien courte, parce qu'on peut aisément la reduire à cet abregé. Ajoûtez ensemble les aires 196, 16, des deux bases ABCD, EFGH, pour avoir leur somme 212. Multipliez ensemble les deux mêmes bases 196, 16, pour avoir leur produit 3136, dont la racine quarrée 56 doit être ajoûtée à la somme precedente 212, pour avoir une seconde somme 268, laquelle estant multipliée par la hauteur ω Y de la Pyramide tronquée, que nous avons supposée de 30 pieds, le tiers du produit donnera comme auparavant 2680 pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche.

Cette regle se peut appliquer à un cone tronqué, mais pour éviter les fractions, qui peuvent arriver dans l'aire de chaque base, ajoûtez à la somme des quarrez des diametres des deux bases le produit des

deux mêmes diametres, & multipliez la somme par la hauteur du cone tronqué, pour avoir un second produit, qu'il faudra multiplier toûjours par 157, & diviser le produit toûjours par 600, pour avoir la solidité du cone tronqué.

Ou plus briévement, multipliez l'excez du quarré de la somme des diametres des deux bases sur le produit des deux mêmes diametres par 157. fois la hauteur du cône tronqué, & divisez le produit par 600, le quotient donnera la solidité qu'on cherche.

PROBLEME IV.

Mesurer une Sphere.

POur trouver la solidité de la sphere BCDE, dont le diametre BD est supposé de 200. pieds, cherchez par *Probl. 9. Planim.* sa surface, qui se trouvera de 125600.

pieds quarrez, & multipliez cette surface 125600. par le rayon AB de la ſphere, que nous avons ſuppoſé de 100. pieds, & le

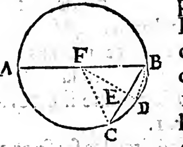
tiers du produit donnera 4186666. pieds cubiques & 1152. pouces cubiques pour la ſolidité de la ſphere propoſée BCDE, comme il eſt évident par *Theor*. 1.

Ou bien pour éviter les fractions, qui peuvent arriver à la ſurface de la ſphere, multipliez le cube 8000000. du diametre BD 200. toûjours par 157, & diviſez le produit 1256000000. toûjours par 300, & la ſolidité qu'on cherche ſe trouvera la même qu'auparavant. La demonſtration de cette Pratique eſt évidente par *Theor*. 2.

PROBLEME V.

Mesurer un secteur de sphere.

POur trouver la solidité du secteur de sphere BFCD, le diametre AB étant supposé de 200 pieds, & l'arc BDC de 80 degrez, cherchez par *Prob.* 10. *Planim.* l'aire de la base du secteur, ou la surface du Segment de sphere BCD, qui se trouvera de 14692 pieds quarrez, & d'environ 57 pouces quarrez, & multipliez cette base par le rayon CF 100, le tiers du produit donnera par *Theor.* 1. 489734 pieds cubiques & 748 pouces cubiques pour la solidité du secteur proposé BFCD.



Cette solidité ainsi trouvée n'est

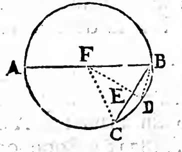
pas dans une trop grande precision, parce que dans la surface du Segment de sphere, c'est à dire dans la base du secteur nous avons negligé les fractions des pouces. C'est pourquoy pour trouver autant exactement qu'il sera possible la solidité du secteur proposé BFCD independamment de sa base, suivez cette regle, qui a sa demonstration.

Multipliez le sinus verse 2339556 de la moitié de l'arc BDC par le cube 8000000 du diametre AB 200, & le produit 18716448000000 toûjours par 157, & divisez ce second produit 2938482336000000 toûjours par 600 fois le sinus Total 10000000, c'est à dire par 6000000000, le quotient donnera environ 489747 pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche.

PROBLEME VI.

Mesurer un Segment de sphere.

POur trouver la solidité du Segment de sphere BCD, le diametre AB estant supposé, comme auparavant, de 200 pieds, & l'arc BDC de 80 degrez, cherchez par le Probleme precedent, la solidité du secteur B F C D, qui a esté trouvée de 489 747 pieds cubiques, & ostez-en le cone FCB, qui se trouvera de 331282 pieds cubiques & 296 pouces cubiques par *Probl.* 2. le reste donnera 158464 pieds cubiques & 1432 pouces cubiques pour la solidité du Segment proposé BCD.



Mais pour trouver la solidité du

cone FCB, il faut trouver sa hauteur EF, & le diametre BC de sa base, laquelle on pourra connoistre en suite par *Probl. 5. Planim.* La hauteur EF a esté trouvée au *Probl. 10. Planim.* de 76. pieds & 7. pouces, & le diametre BC se trouvera par cette analogie,

Comme le Sinus Total 100000
Au diametre AB 200
Ainsi le Sinus de la moitié de l'arc BDC 64279
Au diametre BC $128\frac{1}{7}$.

Pour trouver methodiquement la solidité de ce cone, sans passer par les fractions, qui peuvent arriver à sa hauteur & à sa base; multipliez le quarré 4131789841. du sinus 64279. de la moitié de l'arc BDC par le sinus 76604. du complement de la même moitié, & multipliez le produit 316511628979964. par 157. fois le cube 8000000. du diametre AB 200, sçavoir par 1256000000, & divisez ce second pro-

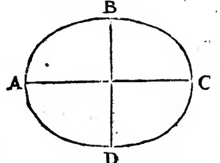
duit 3975386059988437840000-00 par 1200 fois le cube 10000000-00000000 du sinus Total 100000, savoir par 1200000000000000000, le quotient donnera 331282 pieds cubiques & 296 pouces cubiques pour la solidité du cone BDC.

Pour éviter un calcul si long, servez-vous des Logarithmes, & ajoûtez ensemble ces quatre choses: le double 19. 6161350 du Logarithme du sinus de la moitié de l'arc BDC, le Logarithme 9. 8842539 du sinus du complement de la même moitié, le Logarithme 2. 1958996 de 157, le triple 6. 9030897 du Logarithme 2. 3010299 du diametre AB 200, & ôtez de la somme 38. 5993782 la somme 33079181 2du Logarithme 3. 0791812 de 1200, & du triple 30. 0000000 du Logarithme 10. 0000000 du Sinus Total, il restera ce Logarithme 5. 5201970, qui donnera environ la même solidité qu'auparavant.

PROBLEME VII.

Mesurer un Spheroïde.

POur trouver la solidité du Spheroïde ABCD, dont AC est supposé l'axe de circonvolution, qui soit par exemple de 200 pieds, & l'autre axe BD de 144, cherchez par *Probl.* 4. la



solidité d'une sphere, dont le diametre soit égal à l'axe de circonvolution AC 200, cette solidité se trouvera de 4186666 pieds cubiques & 1152 pouces cubiques, que vous multiplierez par le quarré 20736 de l'autre axe BD 144, & vous diviserez le produit 86814720000 par le quarré 40000 de l'axe de circonvo-

lution AC 200, le quotient donnera 2170368. pieds cubiques pour la solidité du Spheroïde proposé ABCD, comme il est évident par *Theor*. 3.

Ou plus facilement pour éviter les fractions, qui se peuvent rencontrer dans la solidité de la sphere, multipliez le solide 4147200. sous l'aissieu AC 200, & le quarré 20736. de l'axe BD 144, toûjours par 157, & divisez le produit 651110400. toûjours par 300, le quotient donnera comme auparavant, 2170368. pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche, comme il est évident par *Theor*. 4.

PROBLEME VIII.

Mesurer un Paraboloïde.

POur trouver la solidité du Paraboloïde AEBDF, dont la hauteur AC est supposée de 215.

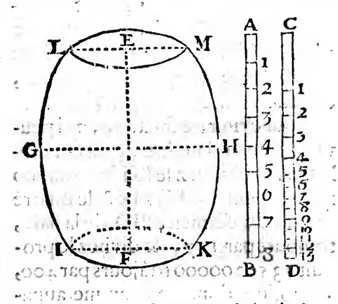
pieds, & le diametre BD de sa base 200, cherchez par *Probl. 5. Planim.* l'aire de cette base, qui se trouvera de 31400. pieds quarrez, que vous multiplierez par la hauteur AC 215, & la moitié du produit donnera 3375500 pieds cubiques pour la solidité du Paraboloïde proposé AEBDF, comme il est évident par *Theor. 5.*

Pour éviter les fractions, qui peuvent arriver dans la base du Paraboloïde, multipliez le solide 8600000 sous la hauteur AC 215 & le quarré 40000 du diametre BD de la base, toûjours par 157, & divisez le produit 1350200000 toûjours par 400, le quotient donnera, comme auparavant, 3375500 pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche.

PROBLEME IX.

Mesurer un tonneau.

IL y en a qui mesurent un tonneau, en le considerant comme deux cones tronquez joints ensemble, ou comme une partie de Spheroïde : mais comme tout cela ne fait



qu'approcher de la verité, j'aime mieux me servir de la methode sui-

vante, laquelle quoyque mecanique, approche auſſi beaucoup de la verité, & eſt tres-commode dans la pratique.

Il faut en premier lieu determiner la meſure, dont on veut ſe ſervir, parce qu'elle n'eſt pas la même par tout. Suppoſons que cette meſure quelque nom qu'elle puiſſe avoir, ſoit un Priſme, comme un cylindre concave, dont la hauteur ſoit de 6 pouces, & le diametre de ſa baſe de 3 pouces.

Cela étant ſuppoſé, preparez une regle de fer, ou de quelqu'autre matiere ſolide, comme AB, & y mettez d'un côté la hauteur de vôtre meſure autant de fois qu'elle y pourra entrer, & y marquez les points, 1, 2, 3, 4, 5, &c. & ce côté s'appellera, *le côté des parties égales.* Mais ſur l'autre côté, comme ſeroit CD, que nous appellerons *le côté des diametres*, vous y marquerez premierement le diametre de

vôtre mesure, depuis C jusques au point 1, puis le diametre d'une mesure double depuis le même point C jusques au point 2, & ainsi en suite.

Toute la difficulté est de trouver les diametres des mesures doubles, triples, &c. Pour cette fin divisez le diametre de vôtre mesure en plusieurs parties égales, & le nombre le plus grand sera le meilleur, comme en 100, & faites-en une échelle particuliere, pour y prendre la quantité d'un diametre d'une mesure double, triple, &c. en cette sorte.

Pour trouver le diametre d'une mesure double, supposant que celuy de la mesure simple soit de 100 parties, doublez le quarré de ce nombre 100, & vous aurez 20000, dont la racine quarrée donnera environ 141 parties, qui étant prises sur l'échelle doivent être portées depuis C jusques à 2, & C 2 sera le diametre d'une mesure double; & ainsi des autres.

La regle étant ainsi preparée, voicy la maniere de s'en servir. Voyez premierement sur le côté des parties égales, combien de telles parties contient la longueur du tonneau EF, supposons qu'elle en contienne $7\frac{1}{2}$. Voyez encore sur le côté des diametres, ou des parties inégales combien de telles parties contient le plus petit diametre IK ou LM, s'ils sont égaux, & le plus grand GH, ce qui sera aisé, en faisant passer la regle par le bondon, & si GH en contient par exemple $8\frac{1}{2}$, & IK $4\frac{1}{4}$, ajoûtez ensemble ces deux nombres $8\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, ou $\frac{34}{4}$, $\frac{17}{4}$, & vous aurez $\frac{51}{4}$, dont la moitié $\frac{51}{8}$, ou $6\frac{3}{8}$ est la quantité d'un diametre moyen arithmetique, laquelle étant multipliée par la hauteur EF, que nous avons supposée $7\frac{1}{2}$, le produit donnera environ 48 mesures pour la capacité du tonneau KILM.

Si vous voulez trouver en mesures cubiques, comme en pouces cu-

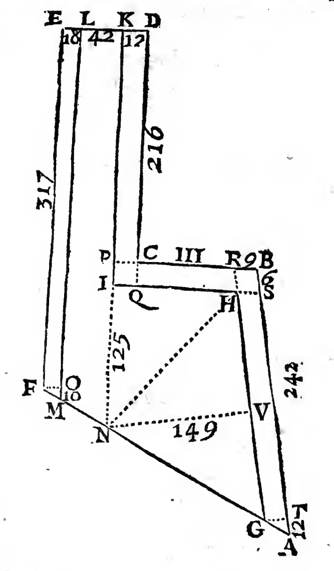
biques la solidité de ce tonneau, mesurez en pouces la longueur EF, & les deux diametres GH, IK, dont le produit doit être ôté du quarré de leur somme, aprés quoy on doit multiplier le reste toûjours par 157 fois la longueur EF du tonneau & diviser le produit toûjours par 600.

PROBLEME X.

Mesurer un Rempart.

LA ligne AB represente la face d'un Bastion d'un Exagone regulier, dont le côté interieur est supposé de 120 toises, ou de 720 pieds. La ligne BC represente le flanc, que l'on suppose perpendiculaire à la courtine, & de 20 toises ou de 120 pieds. La ligne CD represente la moitié de la courtine, que nous supposerons icy de 216. pieds. La ligne DE, qui est perpendiculair e

diculaire à CD repreſente l'épaiſ-



ſeur du Rempart par le pied, que

nous supposerons de 72. pieds, & la ligne EF, qui est parallele à la courtine CD, & qui est terminée en F par la Capitale prolongée, termine la base du Rempart du côté de la ville. La ligne GHIK, qui est parallele au premier trait termine le talus exterieur du Rempart, & la ligne LM l'interieur, tellement que l'espace compris en dedans par ces deux dernieres lignes, sçavoir le plan GHIKLMG represente la largeur du Rempart, sur laquelle on l'éleve sans talus.

Pour trouver la solidité de cette partie de Rempart, ce qui suffit pour sçavoir la solidité entiere du Rempart, parce que nous supposons que la place est reguliere, il faut connoistre en premier lieu la quantité des lignes & des angles, ce qui sera facile à celuy qui entendra la fortification. Nous supposons icy les lignes d'autant de pieds que vous les voyez marquées dans la figure, où

l'on void aſſez clairement leur diſpoſition, ſans qu'il ſoit beſoin d'en parler icy davantage.

Cela étant ſuppoſé, il faut commencer à meſurer les baſes des divers ſolides, dont le Rempart eſt composé, qui ſont des Priſmes & des Pyramides.

Pour trouver l'aire du Trapeze KLMN, qui a deux côtez paralleles KN, LM, on multipliera leur ſomme 680. par la moitié 21. de leur diſtance KL, & le produit donnera 14280. pieds quarrez pour la baſe KLMN.

Pour trouver l'aire du Trapeze GHIN, on le reduira en deux triangles NIH, GHN. L'aire du premier triangle ſe trouvera de 7687. pieds quarrez, & celle du ſecond de 18029. La ſomme des deux aires donnera 25716. pieds quarrez, pour l'aire du Trapeze GHIN, laquelle étant ajoûtée à celle du Trapeze KLMN, que nous avons trouvée

de 14280. pieds quarrez, on aura 39996. pieds quarrez pour l'aire de la base GHIKLM, laquelle étant multipliée par la hauteur du Rempart, que nous supposerons de 18. pieds, on aura 719928. pieds cubiques pour la solidité de la terre, qui s'éleve sans talus sur la base GAIKLM.

Pour trouver la solidité des talus, & premierement celle du talus interieur, on le reduira en un Prisme, dont la base est le rectangle FOLE, & en une Pyramide, dont la pointe est F, la hauteur est FO, & un côté de sa base rectangulaire est OM, l'autre côté étant égal à la hauteur du Rempart. L'aire du rectangle FOLE se trouvera de 5706. pieds quarrez, laquelle étant multipliée par la hauteur du Rempart on aura 51354. pieds cubiques, pour la solidité du Prisme, dont la base est FOLE. L'aire de la base de la Pyramide FOM se trouvera

de 180. pieds quarrez, laquelle étant multipliée par le tiers de sa hauteur FO, on aura 1080. pieds cubiques, pour la solidité de la Pyramide FOM. Si on ajoûte ensemble ces deux soliditez 51354, 1080, leur somme 52434. donnera la solidité du talus interieur.

Pareillement pour trouver la solidité du talus exterieur, on le reduira en trois Prismes, dont les bases sont les trois rectangles CDKP, CRHQ, GHST, & en trois Pyramides, dont les bases sont le quarré CPIQ, le Trapeze HRBS, & le triangle ATG la somme 569. des trois longueurs CD, CR, ST, étant multipliée par la largeur commune DK 12, donnera 6828. pieds quarrez pour l'aire des trois Rectangles precedens, laquelle étant multipliée par la moitié de la hauteur du Rempart, on aura 61452. pieds cubiques pour la solidité des trois

Priſmes, dont le talus exterieur eſt compoſé. L'aire du quarré QCPI ſe trouvera de 144. pieds quarrez, celle du trapeze HRBS de 108, & celle du triangle ATG de 72. La ſomme de ces trois aires eſt 324. laquelle étant multipliée par le tiers de la hauteur du Rempart donnera 1944. pieds cubiques pour la ſolidité des trois Pyramides, laquelle étant ajoûtée à celle des trois Priſmes precedens, qui a eſté trouvée de 61452. pieds cubiques, on aura 63396. pieds cubiques pour la ſolidité du talus exterieur.

Enfin ſi on ajoûte enſemble ces trois ſoliditez trouvées, 63396, 52434, 709308, qui ſont les ſoliditez du talus exterieur, du talus interieur, & du terre-plain du Rempart, on aura 835722. pieds cubiques pour la ſolidité entiere de cette partie de Rempart terminée par une demie courtine & par un demi-

baſtion, laquelle étant enfin multipliée par le double du nombre des Baſtions, comme icy par 12, on aura 10028664. pieds cubiques, ou 46429. toiſes cubiques pour la ſolidité entiere du Rempart.

C'eſt de la même façon que l'on meſurera la ſolidité du foſſé d'une fortification, & auſſi celle du Parapet avec ſa Banquette : mais cette ſolidité ſe peut connoiſtre avec bien moins de peine, car ſi on multiplie l'aire du Profil du Parapet avec ſa Banquette par la quantité d'une ligne tirée par le milieu du Plan du Parapet & de la Banquette, on aura la ſolidité du Parapet & de ſa Banquette. C'eſt de cette maniere qu'on trouvera la ſolidité de l'Eſplanade, & auſſi du Rempart avec ſon Parapet & ſa Banquette tout enſemble, lorſque les Baſtions ſeront creux. Je ſçay bien que cette methode n'eſt pas

tout à fait Geometrique, mais comme elle ne peut pas manquer ſenſiblement, il ſera tres-avantageux de s'en ſervir dans la Pratique.

F I N.

TABLE.

PREMIERE PARTIE.

De la Trigonometrie Rectiligne.

CHAPITRE II.

THEOREMES.

Theoreme I. Dans un triangle rectangle, la raison d'un côté à l'autre côté, est

CHAPITRE III.

Du Calcul des Triangles Rectangles.

CHAPITRE IV.

Du Calcul des Triangles Obliquangles.

SECONDE PARTIE.

De la Longimetrie.

TROISIE'ME PARTIE.

De la Planimetrie.

CHAPITRE I.

THEOREMES.

CHAPITRE II.

PROBLEMES.

QUATRIE'ME PARTIE.

De la Stereometrie.

CHAPITRE I.

THEOREMES.

CHAPITRE II.

PROBLEMES.

Fin de la Table.






IX-4